

# 数 学

**1** 小問集合 (20 点)

次の  を正しくうめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

(1)  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$  を計算すると  となる。

(2) 2 次関数  $y = x^2 + 6x + a + 4$  ( $a$  は定数) の  $-4 \leq x \leq -1$  における最大値が 9 であるとき、 $a =$   である。

(3) 3 つの集合  $A, B, C$  を次のように定める。

$$A = \{2n \mid n \text{ は自然数}\}, B = \{3n \mid n \text{ は自然数}\}, C = \{12n \mid n \text{ は自然数}\}$$

このとき、 $A \cap B = \{$    $n \mid n \text{ は自然数}\}$  である。

また、自然数  $x$  が  $C$  の要素であることは、 $x$  が  $A \cap B$  の要素であるための 。

にあてはまるものを、次の **1** ~ **4** のうちから一つ選び、番号で答えよ。

- 1** 必要十分条件である
- 2** 必要条件であるが、十分条件ではない
- 3** 十分条件であるが、必要条件ではない
- 4** 必要条件でも十分条件でもない

(4) A 店では 1 枚 500 円のハンカチを 1 枚買うごとに、タオル 1 枚につき 50 円引きになる券 (以下、値引券) を 1 枚もらえる。花子さんはこの値引券を 5 枚持っていた。ある日、花子さんは A 店で 1 枚 500 円のハンカチを何枚か買い、その後さらに、以前から持っていた 5 枚と合わせて、持っている値引券をすべて利用し、1 枚 600 円のタオルをその値引券と同じ枚数だけ買おうとしている。花子さんがこのハンカチとタオルを合計 8000 円以下で買うとき、ハンカチは最大  枚買うことができる。ただし、消費税は考えないものとする。

**解答・配点**

(1)ア  $4\sqrt{10}$  (5 点)

(2)イ 10 (5 点)

(3)ウ 6 (2 点)

エ **3** (3 点)

(4)オ 5 (5 点)

**解法**

(1)

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 &= (5 + 2\sqrt{10} + 2) - (5 - 2\sqrt{10} + 2) \\ &= 4\sqrt{10}\end{aligned}$$

**展開の公式**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

[(1)の別解]

$$(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2=\{(\sqrt{5}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{2})\}\{(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{5}-\sqrt{2})\}$$

$$=2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{10}$$

(2)

$$y=x^2+6x+a+4$$

$$=(x+3)^2+a-5$$

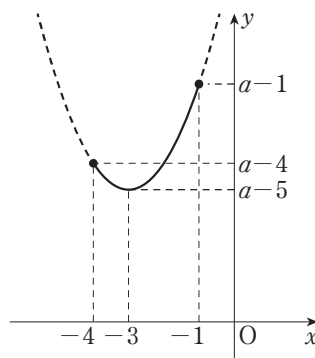
$-4\leq x\leq -1$  におけるグラフは右図のようになり、 $x=-1$  のとき最大値  $a-1$  をとる。

この最大値が 9 のとき

$$a-1=9$$

よって

$$a=10$$



(3)

$A$  は偶数の自然数全体の集合、 $B$  は 3 の倍数の自然数全体の集合であるから、 $A\cap B$  は 2 と 3 の公倍数、すなわち 6 の倍数の自然数全体の集合である。  
よって

$$A\cap B=\{6n \mid n \text{ は自然数}\}$$

次に、条件  $p$  を  $x\in C$ 、条件  $q$  を  $x\in A\cap B$  とする。

・  $p\implies q$  について

$x\in C$  のとき、 $x=12n$  ( $n$  は自然数) と表され、 $x=6\cdot 2n$  であるから、 $x$  は 6 の倍数である。

よって  $x\in A\cap B$

すなわち、 $p\implies q$  は真である。

・  $q\implies p$  について

$6\in A\cap B$  であるが、 $6\notin C$  であるから、 $q\implies p$  は偽である。

以上より、 $p$  は  $q$  であるための十分条件であるが、必要条件ではない (3)。

(4)

ハンカチを  $x$  枚買うとすると、値引券を  $x$  枚もらえるから、値引券は全部で  $(x+5)$  枚ある。

値引券を利用してハンカチとタオルを買ったときの合計金額は

$$500x+550(x+5)=1050x+2750 \text{ (円)}$$

これが 8000 円以下になるとき

$$1050x+2750\leq 8000$$

$$1050x\leq 5250$$

$$x\leq 5$$

これを満たす最大の整数は  $x=5$

よって、ハンカチは最大 5 枚買うことができる。

◀ 因数分解の公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

◀ 2 次関数の最大値・最小値

グラフが下に凸の 2 次関数では、定義域の両端のうち、軸から遠い方の端で最大値をとる (軸が定義域の中央にあるときは、両端で最大値をとる)。

◀  $p\implies q$ ,  $q\implies p$  の真偽を調べる。

◀ 偽であることを示すには、反例を 1 つ挙げるとよい。

◀  $p\implies q$  が真であるとき、

$p$  は  $q$  であるための十分条件

$q$  は  $p$  であるための必要条件

という。

◀ タオル 1 枚の値段は 550 円になる。

2

[1] 数と式 (10 点)

2 次方程式  $x^2-4x+1=0$  の 2 つの解のうち、大きい方の解を  $p$ 、小さい方の解を  $q$  とする。

(1)  $a=p-q-3$  とするとき、 $a$  の値を求めよ。

(2) (1)のとき、不等式  $ax-6>0$  を満たす  $x$  のうち、最小の整数値を求めよ。

配点

[1](1) 4点 (2) 6点

解答

(1)

$x^2 - 4x + 1 = 0$  を解くと

$$x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \times 1}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$p > q$  であるから  $p = 2 + \sqrt{3}$ ,  $q = 2 - \sqrt{3}$

$$a = p - q - 3$$

$$= (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) - 3$$

$$= 2\sqrt{3} - 3$$

答  $a = 2\sqrt{3} - 3$

◀ 2次方程式の解の公式

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

特に,  $b = 2b'$  のとき

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

完答への道のり

◻ A 2次方程式  $x^2 - 4x + 1 = 0$  を解くことができた。

◻ B  $p$  と  $q$  の値を求めることができた。

◻ C 答えを求めることができた。

(2)

$a = 2\sqrt{3} - 3$  であるから, 不等式  $ax - 6 > 0$  は

$$(2\sqrt{3} - 3)x - 6 > 0$$

$$(2\sqrt{3} - 3)x > 6$$

$(2\sqrt{3})^2 = 12$ ,  $3^2 = 9$  であるから  $2\sqrt{3} > 3$

$2\sqrt{3} - 3 > 0$  であるから

$$x > \frac{6}{2\sqrt{3} - 3}$$

ここで

$$\frac{6}{2\sqrt{3} - 3} = \frac{6(2\sqrt{3} + 3)}{(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)}$$

$$= \frac{6(2\sqrt{3} + 3)}{12 - 9}$$

$$= 2(2\sqrt{3} + 3)$$

$$= 4\sqrt{3} + 6$$

よって, 不等式の解は  $x > 4\sqrt{3} + 6$  .....①

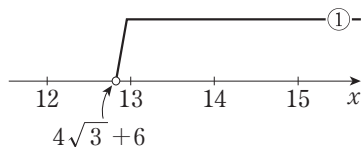
$(4\sqrt{3})^2 = 48$ ,  $6^2 = 36$ ,  $7^2 = 49$  であるから

$$6 < 4\sqrt{3} < 7$$

$$12 < 4\sqrt{3} + 6 < 13$$

したがって, ①を満たす  $x$  のうち, 最小の整数値は

$$x = 13$$



答  $x = 13$

◀両辺を  $2\sqrt{3} - 3$  ( $> 0$ ) で割っても不等号の向きは変わらない。

◀分母の有理化

$a > 0$ ,  $a \neq b^2$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a} - b} &= \frac{\sqrt{a} + b}{(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)} \\ &= \frac{\sqrt{a} + b}{a - b^2} \end{aligned}$$

◀単に  $1 < \sqrt{3} < 2$  からでは

$4 < 4\sqrt{3} < 8$ ,  $10 < 4\sqrt{3} + 6 < 14$  となり,  $4\sqrt{3} + 6$  の整数部分がわからない。

完答への道のり

◻ A  $2\sqrt{3} - 3$  が正の数であることに注意して, 不等式の両辺を  $2\sqrt{3} - 3$  で割ることができた。

◻ B 不等式の右辺の分母を有理化することができた。

◻ C 不等式を解くことができた。

◻ D  $6 < 4\sqrt{3} < 7$  に注意して, 答えを求めることができた。

2 [2] 2次関数 (10点)

太郎さんと花子さんは次の【問題1】について考えている。

【問題1】

2次関数  $f(x) = x^2 - 2x + c$  ( $c$  は定数) がある。 $x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し、不等式  $f(x) \geq 0$  が成り立つような  $c$  の値の範囲を求めよ。

この【問題1】に対して、花子さんは以下のように解答したが、【花子さんの解答】を読んだ太郎さんは、この解答が間違いであることを指摘している。

【花子さんの解答】

$x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し、 $f(x) \geq 0$  が成り立つ条件は

$$f(0) \geq 0$$

$f(0) = c$  であるから、求める  $c$  の値の範囲は  $c \geq 0$

太郎： $y = f(x)$  のグラフを考えたかな。まずはグラフの軸を確認しよう。

花子：軸は直線  $x = \boxed{(ア)}$  で、グラフは下に凸の放物線だね。

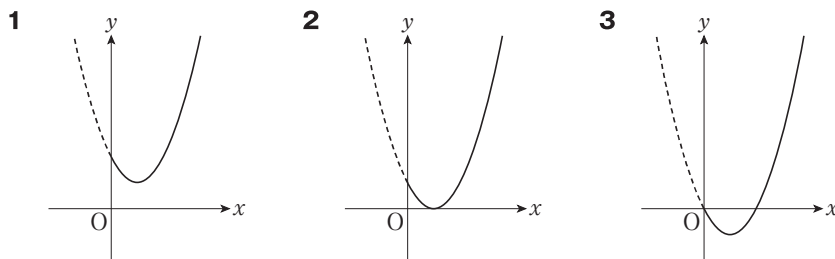
太郎：そうだね。それでは、花子さんの求めた「 $f(0) \geq 0$ 」すなわち「 $c \geq 0$ 」が成り立つときに、「 $x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し  $f(x) \geq 0$ 」が成り立つのかな。

次の3つの  $y = f(x)$  のグラフはすべて「 $f(0) \geq 0$ 」を満たしているけれど、  
 $\boxed{(イ)}$  は「 $x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し、 $f(x) \geq 0$ 」が成り立っていないね。

花子：本当だ。「 $f(0) \geq 0$ 」が成り立てばよいと考えていたことが間違っていたね。

(1)  $\boxed{(ア)}$  にあてはまる数を答えよ。

(2)  $\boxed{(イ)}$  にあてはまるグラフを、次の1～3のうちから一つ選び、番号で答えよ。



(3) 太郎さんと花子さんの会話を参考にして、次の【問題2】を解け。

【問題2】

2次関数  $g(x) = x^2 - 2x + a^2 - 3a + 1$  ( $a$  は定数) がある。 $x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し、不等式  $g(x) \geq 0$  が成り立つような  $a$  の値の範囲を求めよ。

配点

[2](1) 3点 (2) 2点 (3) 5点

解答

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + c \\ &= (x-1)^2 + c-1 \end{aligned}$$

◀放物線  $y = a(x-p)^2 + q$  の頂点は点  $(p, q)$ ，軸は直線  $x = p$

B ☐ $y=f(x)$  のグラフの軸は直線  $x=1$ 

答 1

完答への道のり

A  $f(x)$  を平方完成することができた。

B 答えを求めることができた。

(2)

1~3のグラフのうち、3は  $x \geq 0$  の範囲で  $f(x) < 0$  となる  $x$  が存在するから

「 $x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し、 $f(x) \geq 0$ 」

は成り立たない。

答 3

A ☐

完答への道のり

A (イ)にあてはまるグラフを選ぶことができた。

(3)

$$g(x) = x^2 - 2x + a^2 - 3a + 1$$

$$= (x-1)^2 + a^2 - 3a$$

$y=g(x)$  のグラフの軸は直線  $x=1$

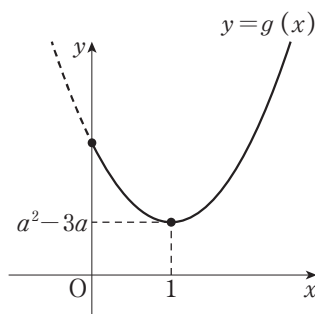
また、 $x \geq 0$  において、 $g(x)$  は  $x=1$  のとき最小値  $a^2 - 3a$  をとる。

よって、 $x \geq 0$  を満たすすべての  $x$  に対し、 $g(x) \geq 0$  が成り立つための条件は

$$a^2 - 3a \geq 0$$

$$a(a-3) \geq 0$$

$$a \leq 0, 3 \leq a$$

答  $a \leq 0, 3 \leq a$ 

◀ ( $x \geq 0$  における  $g(x)$  の最小値)  $\geq 0$  となることが条件である。

◀  $a < \beta$  のとき、2次不等式  $(x-a)(x-\beta) \geq 0$  の解は  $x \leq a, \beta \leq x$

A ☐B ☐C ☐D ☐E ☐

完答への道のり

A  $g(x)$  を平方完成することができた。B  $y=g(x)$  のグラフの軸を求めることができた。C  $x \geq 0$  における  $g(x)$  の最小値を求めることができた。D 最小値の条件に注意して、 $a$  についての不等式をつくることができた。

E 答えを求めることができた。

3

2次関数 (20点)

2つの2次関数  $f(x) = 2x^2 + 2kx + k$ ,  $g(x) = x^2 - x - k^2 + k$  がある。ただし、 $k$  は定数とする。

(1)  $y=f(x)$  のグラフの頂点の座標を  $k$  を用いて表せ。

(2) 2次不等式  $g(x) < 0$  を解け。

(3)  $k < \frac{1}{2}$  とする。 $g(x) < 0$  を満たす  $x$  の範囲において、 $y=f(x)$  のグラフが  $x$  軸と異なる2点で交わるような  $k$  の値の範囲を求めよ。

配点

(1) 4点 (2) 7点 (3) 9点

解答

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2kx + k \\ &= 2\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{2} + k \end{aligned}$$

よって、 $y = f(x)$  のグラフの頂点の座標は

$$\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k^2}{2} + k\right)$$

答  $\left(-\frac{k}{2}, -\frac{k^2}{2} + k\right)$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft f(x) &= 2(x^2 + kx) + k \\ &= 2\left\{x^2 + kx + \left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right\} + k \\ &= 2\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k \end{aligned}$$

◀ 2 次関数  $y = a(x-p)^2 + q$  のグラフの頂点は、点  $(p, q)$  である。

完答への道のり

Ⓐ  $f(x)$  を平方完成することができた。

Ⓑ 答えを求めることができた。

(2)

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - x - k^2 + k \\ &= x^2 - x - k(k-1) \\ &= (x-k)(x+k-1) \end{aligned}$$

$g(x) = 0$  とすると  $x = k, -k+1$

(i)  $k < -k+1$  すなわち  $k < \frac{1}{2}$  のとき

$g(x) < 0$  の解は  $k < x < -k+1$

(ii)  $k = -k+1$  すなわち  $k = \frac{1}{2}$  のとき

$g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$  であるから、 $g(x) < 0$  の解はない。

(iii)  $k > -k+1$  すなわち  $k > \frac{1}{2}$  のとき

$g(x) < 0$  の解は  $-k+1 < x < k$

答  $k < \frac{1}{2}$  のとき  $k < x < -k+1$

$k = \frac{1}{2}$  のとき 解なし

$k > \frac{1}{2}$  のとき  $-k+1 < x < k$

◀ まず、 $g(x)$  を因数分解する。

◀  $k$  と  $-k+1$  の大小で場合分けをする。

◀  $\alpha < \beta$  のとき、2 次不等式  $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$  の解は

$$\alpha < x < \beta$$

◀ (ii) の場合を忘れないこと。

完答への道のり

Ⓐ  $g(x)$  を因数分解することができた。

Ⓑ Ⓓ Ⓕ  $k$  と  $-k+1$  の大小関係から 3 つの場合に分けて考えることができた。

Ⓒ Ⓔ Ⓖ それぞれの場合において、不等式を解くことができた。

(3)

$k < \frac{1}{2}$  のとき、(2) より、 $g(x) < 0$  の解は

$$k < x < -k+1$$

この範囲において、 $y=f(x)$  のグラフが  $x$  軸と異なる 2 点で交わるための条件を求める。

まず、 $y=f(x)$  のグラフが  $x$  軸と異なる 2 点で交わるから、頂点の  $y$  座標が負になるときを考えて

$$-\frac{k^2}{2} + k < 0$$

$$k(k-2) > 0$$

$$k < 0, 2 < k \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

次に、 $y=f(x)$  のグラフの軸は直線  $x = -\frac{k}{2}$

であり、軸が  $k < x < -k+1$  の範囲にあるから

$$k < -\frac{k}{2} < -k+1$$

$$k < -\frac{k}{2} \text{ より } k < 0$$

$$-\frac{k}{2} < -k+1 \text{ より } k < 2$$

これらの共通範囲を求めると

$$k < 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

また、 $f(k) = 2k^2 + 2k^2 + k = k(4k+1)$  であるから

$$f(k) > 0 \text{ より } k(4k+1) > 0$$

$$k < -\frac{1}{4}, 0 < k \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

さらに、 $f(-k+1) = 2(-k+1)^2 + 2k(-k+1) + k = -k+2$  であるから

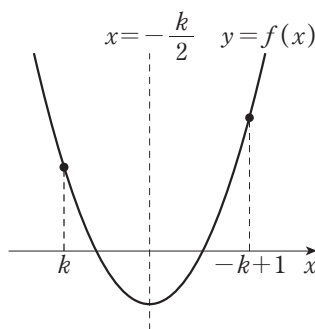
$$f(-k+1) > 0 \text{ より } -k+2 > 0$$

$$k < 2 \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$k < \frac{1}{2}$  の範囲で、①～④を同時に

満たす  $k$  の値の範囲は

$$k < -\frac{1}{4}$$



◀ グラフをかいて条件を求める。

① (頂点の  $y$  座標)  $< 0$

② 軸が  $k < x < -k+1$  の範囲にある

③  $f(k) > 0$

④  $f(-k+1) > 0$

(注) ①は、2 次方程式  $f(x)=0$  の判別式  $D > 0$  を解いてもよい。

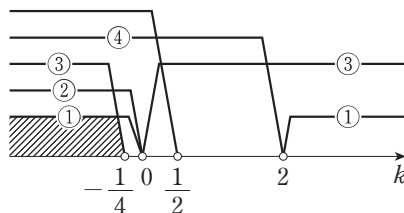
◀  $\alpha < \beta$  のとき、2 次不等式

$$(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \text{ の解は}$$

$$x < \alpha, \beta < x$$

◀  $A < B < C$  の形の不等式は、 $A < B$  かつ  $B < C$  を解く。

◀  $f(k) > 0, f(-k+1) > 0$  となる  $k$  の値の範囲をそれぞれ求める。



答  $k < -\frac{1}{4}$

完答への道のり

Ⓐ  $y=f(x)$  のグラフが  $x$  軸と異なる 2 点で交わるような  $k$  の値の範囲を求めることができた。

Ⓑ 軸が  $k < x < -k+1$  の範囲にあるような  $k$  の値の範囲を求めることができた。

Ⓒ  $f(k) > 0$  となる  $k$  の値の範囲を求めることができた。

Ⓓ  $f(-k+1) > 0$  となる  $k$  の値の範囲を求めることができた。

Ⓔ 答えを求めることができた。

# 4 図形と計量 (20 点)

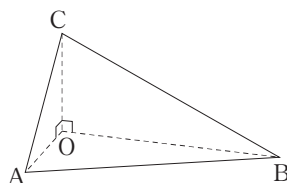
四面体 OABC がある。OA=1, OB=3,  $\cos \angle AOB = -\frac{1}{3}$

であり,  $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$  である。

(1) 辺 AB の長さを求めよ。

(2)  $\triangle OAB$  の面積を求めよ。また,  $\angle OAC = \angle OCB$  であるとき, 辺 OC の長さを求めよ。

(3) (2)のとき, 辺 AB 上を点 P が動くものとする。tan  $\angle OCP$  の最小値を求めよ。



## 配点

(1) 5 点 (2) 7 点 (3) 8 点

## 解答

(1)

$\triangle OAB$  において, 余弦定理により

$$AB^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 12$$

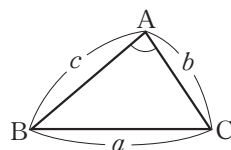
$$AB > 0 \text{ より } AB = 2\sqrt{3}$$

答  $2\sqrt{3}$

## ◀ 余弦定理

$\triangle ABC$  において

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



## 完答への道のり

◀ 余弦定理を用いて辺 AB の長さを求める式をつくることができた。

◀ 答えを求めることができた。

(2)

$$\sin^2 \angle AOB = 1 - \cos^2 \angle AOB$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$$

$$= \frac{8}{9}$$

$0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$  より  $\sin \angle AOB > 0$  であるから

$$\sin \angle AOB = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

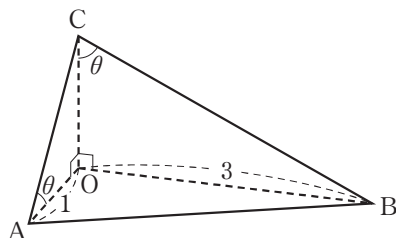
次に,  $\angle OAC = \angle OCB = \theta$  とすると, 直角三角形 OAC において

$$\tan \theta = \frac{OC}{OA} = OC \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

直角三角形 OBC において

$$\tan \theta = \frac{OB}{OC} = \frac{3}{OC} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } OC = \frac{3}{OC}$$



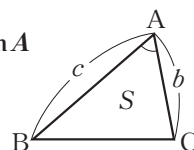
## ◀ 三角比の相互関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

## ◀ 三角形の面積

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$



E ☐

$$OC^2 = 3$$

$$OC > 0 \text{ より } OC = \sqrt{3}$$

答  $\triangle OAB$  の面積  $\sqrt{2}$ ,  $OC = \sqrt{3}$

[線分  $OC$  の長さを求める別解]

条件より  $\triangle OAC \sim \triangle OCB$  であるから

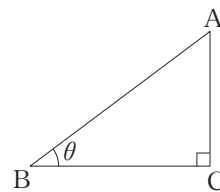
$$OA : OC = OC : OB$$

$$1 : OC = OC : 3$$

$$OC^2 = 3$$

$$OC > 0 \text{ より } OC = \sqrt{3}$$

◀鋭角の三角比



$$\tan \theta = \frac{CA}{BC}$$

完答への道のり

A 三角比の相互関係より,  $\sin \angle AOB$  の値を求めることができた。

B  $\triangle OAB$  の面積を求めることができた。

C 直角三角形  $OAC$  に着目して,  $\tan \angle OAC$  を  $OC$  を用いて表すことができた。

D 直角三角形  $OBC$  に着目して,  $\tan \angle OCB$  を  $OC$  を用いて表すことができた。

E 辺  $OC$  の長さを求めることができた。

(3)

$\triangle OPC$  において

$$\tan \angle OCP = \frac{OP}{OC} = \frac{OP}{\sqrt{3}}$$

であるから,  $\tan \angle OCP$  が最小となるのは, 線分  $OP$  の長さが最小となるときである。

線分  $OP$  の長さが最小となるのは, 右下の図のように  $OP \perp AB$  となるときである。

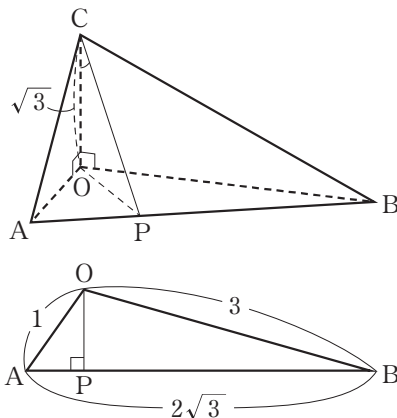
このとき,  $\triangle OAB$  の面積を考えると

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot OP = \sqrt{2}$$

$$OP = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって,  $\tan \angle OCP$  の最小値は

$$\tan \angle OCP = \frac{\sqrt{6}}{3} \div \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$



◀  $\triangle OCP$  は  $\angle COP = 90^\circ$  の直角三角形である。

◀  $\cos \angle AOB < 0$  より,  $\angle AOB$  は鈍角であるから,  $\angle OAB$ ,  $\angle OBA$  は鋭角である。よって,  $OP \perp AB$  となる点  $P$  は確かに辺  $AB$  上にある。

答  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

完答への道のり

A  $\tan \angle OCP$  が最小となるのは, 線分  $OP$  の長さが最小のときであることに気づくことができた。

B 線分  $OP$  の長さが最小となるのは,  $OP \perp AB$  となることに気づくことができた。

C  $\triangle OAB$  の面積に着目して,  $OP \perp AB$  となるときの線分  $OP$  の長さを求めることができた。

D 答えを求めることができた。

## 5 確率 (20 点)

A, B の 2 人が 1 枚ずつ硬貨を持っており、その硬貨を同時に投げる試行を行い、次のように点を与える。

- ・ 1 枚が表で、他の 1 枚が裏の場合  
表が出た人には 1 点、裏が出た人には 0 点
- ・ 2 枚とも表、または、2 枚とも裏の場合  
両者ともに 0 点

この試行を繰り返し行い、得点の合計が先に 2 点になった人を勝者とし、試行を終了する。

- (1) 1 回の試行で A が 1 点を得る確率を求めよ。また、1 回の試行で両者ともに 0 点である確率を求めよ。
- (2) 2 回の試行で A が勝者となる確率を求めよ。また、3 回の試行で A が勝者となる確率を求めよ。
- (3) 4 回以内の試行で A が勝者となる確率を求めよ。

### 配点

- (1) 5 点    (2) 7 点    (3) 8 点

### 解答

(1)

1 回の試行で A が 1 点を得るのは、A が表を出し、B が裏を出す場合である。このときの確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

また、1 回の試行で両者ともに 0 点であるのは、2 枚とも表が出るか、2 枚とも裏が出る場合である。これらは互いに排反であるから、このときの確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

答 (順に)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

### ◀独立な試行の確率

2 つの独立な試行 S, T を行うとき、S では事象 A が起こり、かつ T では事象 B が起こるという事象を C とすると、事象 C の起こる確率は

$$P(C) = P(A) \times P(B)$$

### ◀排反事象の確率

2 つの事象 A と B が互いに排反であるとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### 完答への道のり

- Ⓐ 1 回の試行で A が 1 点を得るのは、A が表を出し、B が裏を出す場合であることに気づくことができた。
- Ⓑ 1 回の試行で A が 1 点を得る確率を求めることができた。
- Ⓒ 1 回の試行で両者ともに 0 点であるのは、2 枚とも表が出るか、2 枚とも裏が出る場合であることに気づくことができた。
- Ⓓ 1 回の試行で両者ともに 0 点である確率を求めることができた。

(2)

2 回の試行で A が勝者となるのは、1 回目、2 回目ともに A が 1 点を得る場合である。このときの確率は、(1)より

B ☐

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

次に、1回の試行でAが1点を得る確率が $\frac{1}{4}$ であるから、1回の試行でAが0点である確率は

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

C ☐

3回の試行でAが勝者となるのは、1回目、2回目でAが0点の場合と1点の場合が1回ずつ起こり、3回目でAが1点を得る場合である。このときの確率は

D ☐

$$({}_2C_1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

答 (順に)  $\frac{1}{16}, \frac{3}{32}$

#### ◀余事象の確率

事象Aの余事象 $\overline{A}$ の起こる確率は

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

◀2回目まででBの得点は0点または1点であるから、2回目まででBが勝ち、試行が終了することはない。

#### ◀反復試行の確率

1回の試行で事象Aの起こる確率を $p$ とする。この試行を $n$ 回繰り返すとき、事象Aがちょうど $r$ 回起こる確率は

$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$

#### 完答への道のり

① 2回の試行でAが勝者となる場合について考えることができた。

② 2回の試行でAが勝者となる確率を求めることができた。

③ 3回の試行でAが勝者となる場合について考えることができた。

④ 3回の試行でAが勝者となる確率を求めることができた。

(3)

1回の試行で、Bが1点を得る確率は、Aと同じで $\frac{1}{4}$ である。

また、1回の試行で両者が0点である確率は、(1)より $\frac{1}{2}$ である。

ここで、4回の試行でAが勝者となる確率を求める。

(i) 1～3回目で、Aが1点、Bが1点、両者0点の場合が1回ずつ起こり、4回目でAが1点を得る場合

A ☐B ☐

$$\text{確率は } (3! \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

(ii) 1～3回目で、Aが1点の場合が1回、両者0点の場合が2回起こり、4回目でAが1点を得る場合

C ☐D ☐

$$\text{確率は } \left\{ {}_3C_1 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

(i), (ii)は互いに排反であるから、4回の試行でAが勝者となる確率は

E ☐

$$\frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{3}{32}$$

(2)より、2回の試行でAが勝者となる確率は $\frac{1}{16}$ 、3回の試行でAが勝者

となる確率は $\frac{3}{32}$ であるから、4回以内の試行でAが勝者となる確率は

F ☐

$$\frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

答  $\frac{1}{4}$

◀Aが1点、Bが1点、両者0点、これらの順序が3!通りある。

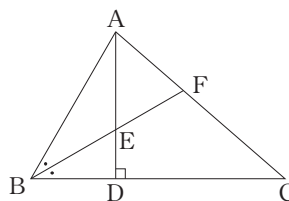
完答への  
道のり

- A C** 4回の試行でAが勝者になる事象を、2つの場合に分けて考えることができた。
- B D** それぞれの場合で、4回目の試行でAが勝者となる確率を求めることができた。
- E** 4回の試行で、Aが勝者となる確率を求めることができた。
- F** 答えを求めることができた。

## 6 図形の性質 (20点)

AB = 6, BC = 9 である鋭角三角形 ABC がある。頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線と辺 BC の交点を D とし、 $\angle ABC$  の二等分線と線分 AD, 辺 AC の交点をそれぞれ E, F とすると、 $AE:ED = 2:1$  である。

- (1)  $\frac{AF}{FC}$  の値を求めよ。また、線分 BD の長さを求めよ。
- (2) 線分 AD を直径とする円と辺 AB の交点のうち、A でない方の点を G とするとき、線分 BG の長さを求めよ。また、直線 CE と辺 AB の交点を H とするとき、線分 BH の長さを求めよ。
- (3)  $\frac{BE}{EF}$  の値を求めよ。また、(2)の G, H について、 $\triangle EGH$  の面積を  $S_1$ ,  $\triangle EFH$  の面積を  $S_2$  とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$  の値を求めよ。



配点

- (1) 5点 (2) 7点 (3) 8点

解答

(1)

BF は  $\angle ABC$  の二等分線であるから

$$AF:FC = AB:BC = 6:9 = 2:3$$

すなわち  $\frac{AF}{FC} = \frac{2}{3}$

同様に、 $\triangle ABD$  において、 $AE:ED = AB:BD$  であるから

$$2:1 = 6:BD$$

$$BD = 3$$

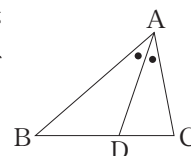
$$\text{答} \quad \frac{AF}{FC} = \frac{2}{3}, \quad BD = 3$$

◀角の二等分線と辺の比

右図で、AD が  $\angle A$  の二等分線であるとき

$$\begin{aligned} BD:DC &= AB:AC \\ &= AB:AC \end{aligned}$$

◀線分 BE は、 $\triangle ABD$  における  $\angle ABD$  の二等分線である。



完答への  
道のり

- A** 角の二等分線と辺の比の性質を用いて  $AF:FC$  を求めることができた。
- B**  $\frac{AF}{FC}$  の値を求めることができた。
- C** 角の二等分線と辺の比の性質を用いて  $AB:BD$  を考えることができた。
- D** 線分 BD の長さを求めることができた。

(2)

AD は円の直径で、 $AD \perp BC$  であるから、BC は円の接線である。方べきの定理により

$$BG \cdot BA = BD^2$$

$$BG \cdot 6 = 3^2$$

$$BG = \frac{3}{2}$$

また、 $BD = 3$  より

$$DC = 9 - 3 = 6$$

$\triangle ABC$  において、チェバの定理により

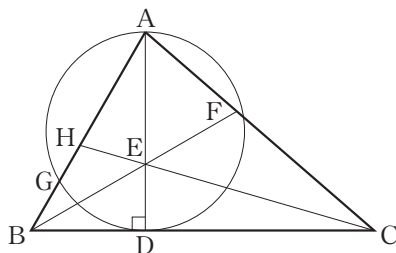
$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

$$\frac{AH}{HB} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{AH}{HB} = \frac{4}{3}$$

よって、 $AH : BH = 4 : 3$  であるから

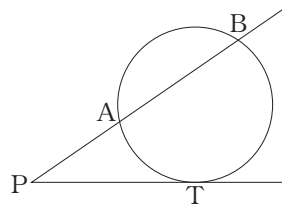
$$BH = \frac{3}{7} AB = \frac{3}{7} \cdot 6 = \frac{18}{7}$$



#### ◀方べきの定理

円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。P を通る直線がこの円と 2 点 A, B で交わるとき

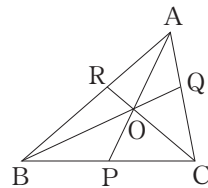
$$PA \cdot PB = PT^2$$



#### ◀チェバの定理

$\triangle ABC$  の内部に点 O がある。頂点 A, B, C と点 O を結ぶ直線が向かい合う辺とそれぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



答  $BG = \frac{3}{2}, BH = \frac{18}{7}$

#### 完答への道のり

Ⓐ 方べきの定理を用いて、線分 BG の長さの関係式をつくることができた。

Ⓑ 線分 BG の長さを求めることができた。

Ⓒ チェバの定理を用いて、線分の長さの比について関係式をつくることができた。

Ⓓ チェバの定理を用いて、 $\frac{AH}{HB}$  の値を求めることができた。

Ⓔ 線分 BH の長さを求めることができた。

(3)

$\triangle FBC$  と直線 AD において、メネラウスの定理により

$$\frac{BE}{EF} \cdot \frac{FA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

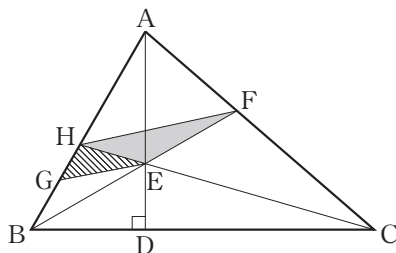
$$\frac{BE}{EF} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{3} = 1$$

$$\frac{BE}{EF} = \frac{5}{4}$$

次に

$$GH = BH - BG$$

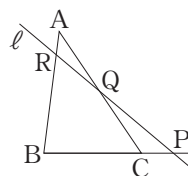
$$= \frac{18}{7} - \frac{3}{2} = \frac{15}{14}$$



#### ◀メネラウスの定理

$\triangle ABC$  の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線  $\ell$  と、それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



$$\text{よって } GH: BH = \frac{15}{14} : \frac{18}{7} = 5:12$$

$$\triangle EHG : \triangle EHB = GH : BH = 5:12$$

$$S_1 = \frac{5}{12} \triangle EHB \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また

$$\triangle EFH : \triangle EHB = EF : BE = 4:5$$

$$S_2 = \frac{4}{5} \triangle EHB \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{48}{25}$$

$$\text{答} \quad \frac{BE}{EF} = \frac{5}{4}, \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{48}{25}$$

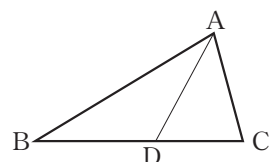
◀(2)で  $\frac{AH}{HB}$  を求めたから,  $\triangle ABF$  と直線  $CH$  についてメネラウスの定理を用いて

$$\frac{BE}{EF} \cdot \frac{FC}{CA} \cdot \frac{AH}{HB} = 1$$

としてもよい。

◀高さが等しい2つの三角形の面積比は底辺の長さの比と等しい。

$$\triangle ABC : \triangle ADC = BC : DC$$



完答への道のり

◀A メネラウスの定理を用いて,  $\frac{BE}{EF}$  についての関係式をつくることができた。

◀B  $\frac{BE}{EF}$  の値を求めることができた。

◀C  $S_1$  を  $\triangle EHB$  の面積の定数倍として表すことができた。

◀D  $S_2$  を  $\triangle EHB$  の面積の定数倍として表すことができた。

◀E  $\frac{S_2}{S_1}$  の値を求めることができた。