

数 学

1 小問集合 (20 点)

次の を正しくうめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

(1) $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ のとき, $xy =$ (ア), $x^2 - xy + y^2 =$ (イ) である。

(2) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とし, U の部分集合を A , B とする。

$A = \{x \mid 5x - 2 \leq 18, x \in U\}$, $B = \{x \mid -x + 5 < 3, x \in U\}$ のとき, 集合 $A \cap B = \{$ (ウ) $\}$

であり, 集合 $\overline{A} \cup \overline{B} = \{$ (エ) $\}$ である。

ただし, $\overline{A}$, $\overline{B}$ はそれぞれ A , B の補集合を表す。また, (ウ), (エ) には要素を書き並べて答えよ。

(3) 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが x 軸と 2 点 $(1, 0)$, $(3, 0)$ で交わり, 点 $(0, 6)$ を通るとき,
 $f(x) =$ (オ) である。

(4) 花子さんは, 1 日に x ページずつ読むと, ちょうど 30 日で読み終える総ページ数が $30x$ ページの本を読むことにした。花子さんは 1 日目に x ページ読み, 2 日目からは前日に読んだ分の振り返りができるよう, 前日に読んだ最後の 3 ページを含め, x ページずつ読むことにした。つまり, 花子さんが 1 日に読み進めるページ数は

1 日目	2 日目	3 日目	……
x ページ	$x - 3$ ページ	$x - 3$ ページ	……

である。このように読み進めると, 花子さんは 48 日目にこの本を読み終えた。このとき, 花子さんが 47 日目までに読み進めたページ数は, x を用いて (カ) (ページ) と表すことができ, 花子さんが 1 日に読んだページ数 x は (キ) である。ただし, x は整数で $x \geq 4$ とする。

解答・配点

- (1)ア 2 (2 点)
(イ) 14 (3 点)
(2)ウ 3, 4 (3 点)
(エ) 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 (2 点)
(3)オ $2x^2 - 8x + 6$ (5 点)
(4)カ $47x - 138$ (2 点)
(キ) 8 (3 点)

解法

(1)

$$xy = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

$$\blacktriangleleft (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}$$

よって

$$\begin{aligned}x^2-xy+y^2 &= (x+y)^2-3xy \\ &= (2\sqrt{5})^2-3\cdot 2 \\ &= 20-6=14\end{aligned}$$

(2)

$5x-2\leq 18$ を解くと

$$5x\leq 20$$

$$x\leq 4$$

$-x+5<3$ を解くと

$$-x<-2$$

$$x>2$$

よって

$$A=\{x\mid x\leq 4, x\in U\}=\{1, 2, 3, 4\}$$

$$B=\{x\mid x>2, x\in U\}=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

であるから

$$A\cap B=\{3, 4\}$$

また, $\overline{A\cup B}=\overline{A\cap B}$ であるから

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B} &= \overline{A\cap B} \\ &= \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}\end{aligned}$$

(3)

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と 2 点 $(1, 0)$, $(3, 0)$ で交わるから

$$f(x)=a(x-1)(x-3) \quad (a\neq 0)$$

と表される。このグラフが点 $(0, 6)$ を通るとき

$$6=a\cdot(-1)\cdot(-3)$$

$$a=2$$

これは $a\neq 0$ を満たすから適する。

$$\text{よって } f(x)=2(x-1)(x-3)$$

$$\text{すなわち } f(x)=2x^2-8x+6$$

[(3)の別解]

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) とおくと, $y=f(x)$ のグラフは 3 点 $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 6)$ を通るから

$$\begin{cases}a+b+c=0 & \cdots\cdots\cdots\text{①} \\ 9a+3b+c=0 & \cdots\cdots\cdots\text{②} \\ c=6 & \cdots\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$$

③を①, ②に代入して

$$\begin{cases}a+b=-6 & \cdots\cdots\cdots\text{①}' \\ 9a+3b=-6 & \cdots\cdots\cdots\text{②}'\end{cases}$$

①', ②' より $a=2, b=-8$

これは $a\neq 0$ を満たすから適する。

$$\text{すなわち } f(x)=2x^2-8x+6$$

(4)

花子さんが 47 日目までに読み進めたページ数は

$$x+(x-3)\times 46=47x-138 \text{ (ページ)} \quad \cdots\cdots\cdots\text{①}$$

また, 花子さんが 48 日目までに読み進めることができるページ数は

$$x+(x-3)\times 47=48x-141 \text{ (ページ)} \quad \cdots\cdots\cdots\text{②}$$

◀ $x+y, xy$ を用いた式で表す。

$$\begin{aligned}x^2-xy+y^2 &= x^2+y^2-xy \\ &= \{(x+y)^2-2xy\}-xy \\ &= (x+y)^2-3xy\end{aligned}$$

◀ 不等式の両辺を負の数で割ると, 両辺の大小関係が入れ替わる。

◀ ド・モルガンの法則

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B} &= \overline{A\cap B} \\ \overline{A\cap B} &= \overline{A\cup B}\end{aligned}$$

◀ x 軸と 2 点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ で交わる放物線をグラフとする 2 次関数は

$$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

の形で表される。(ただし $a\neq 0$)

総ページ数 $30x$ は、①より多く、②以下であるから

$$\begin{cases} 47x - 138 < 30x & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 30x \leq 48x - 141 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

③を解いて

$$17x < 138$$

$$x < \frac{138}{17}$$

④を解いて

$$-18x \leq -141$$

$$x \geq \frac{141}{18}$$

$$\text{よって } \frac{141}{18} \leq x < \frac{138}{17}$$

x は 4 以上の整数であるから $x = 8$

よって、花子さんが 1 日に読んだページ数 x は 8 である。

◀ x についての連立不等式ができる。

$$\text{◀ } \frac{141}{18} = 7.8\cdots, \frac{138}{17} = 8.1\cdots$$

2 [1] 2 次関数 (10 点)

x についての不等式

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(x+1)(x-k) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

がある。ただし、 k は定数で、 $k \neq -1$ とする。

(1) 不等式①を解け。

(2) 不等式①、②を同時に満たす整数 x がちょうど 3 個存在するような k の値の範囲を求めよ。

配点

1 4 点 (2) 6 点

解答

(1)

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(x+2)(x-5) \geq 0$$

よって、不等式①の解は

$$x \leq -2, 5 \leq x \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$$\text{答 } x \leq -2, 5 \leq x$$

◀ $\alpha < \beta$ のとき、2 次不等式
 $(x-\alpha)(x-\beta) \geq 0$ の解は
 $x \leq \alpha, \beta \leq x$

完答への道のり

◻ A 不等式①の左辺を因数分解することができた。

◻ B 答えを求めることができた。

(2)

$$(x+1)(x-k) < 0 \quad \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

について、 $k \neq -1$ より $k < -1$ 、 $-1 < k$ の場合に分けて考える。

(i) $k < -1$ のとき

◀ k の値によって不等式②の解が異なるから、2 つの場合に分けて考える。なお、 $k = -1$ のときは、 $(x+1)^2 < 0$ となり、解なしとなる。

B ☐C ☐D ☐E ☐F ☐G ☐

不等式②の解は

$$k < x < -1 \dots\dots\dots ③$$

①'と③を同時に満たす整数 x がちょうど 3 個存在するとき、その整数 x は $x = -4, -3, -2$ であるから、これを満たす k の値の範囲は

$$-5 \leq k < -4$$

(ii) $-1 < k$ のとき

不等式②の解は

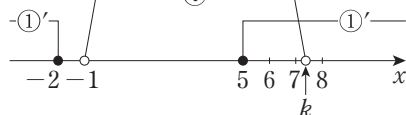
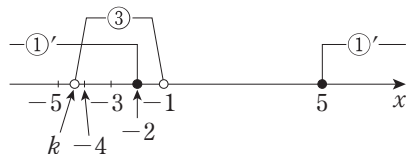
$$-1 < x < k \dots\dots\dots ④$$

①'と④を同時に満たす整数 x がちょうど 3 個存在するとき、その整数 x は $x = 5, 6, 7$ であるから、これを満たす k の値の範囲は

$$7 < k \leq 8$$

(i), (ii)より、求める k の値の範囲は

$$-5 \leq k < -4, 7 < k \leq 8$$



答 $-5 \leq k < -4, 7 < k \leq 8$

◀まず、3 個の整数を求めておく。

◀等号の有無に注意する。具体的な値を考えるとよい。 $k = -4$ のとき、③は $-4 < x < -1$ となり、①'と③の共通範囲は $-4 < x \leq -2$ となるから不適である。 $k = -5$ のときも同様に考えればよい。

◀等号の有無に注意する。

完答への道のり

Ⓐ $k < -1$ と $-1 < k$ の場合に分けて考えることができた。

Ⓑ Ⓔ それぞれの場合において、不等式②の解を求めることができた。

Ⓒ Ⓕ それぞれの場合において、①'と③または①'と④を同時に満たす 3 個の整数 x の値を求めることができた。

Ⓓ Ⓖ それぞれの場合において、条件を満たす k の値の範囲を求めることができた。

2 [2] 数と式 (10 点)

次の【課題】に対する、先生と太郎さんの会話を読んで、下の問いに答えよ。

【課題Ⅰ】

a を正の定数とする。実数 x に関する 2 つの条件 p, q を次のように定める。

$$p: 0 \leq x \leq a$$

$$q: x < 3$$

命題「 $p \implies q$ 」の真偽を調べよ。

先生：条件 p は a の値によって x の値の範囲が変わりますね。 $a = 1$ のとき、命題「 $p \implies q$ 」の真偽について考えてみましょう。

太郎： $a = 1$ のとき、条件 p, q を満たす実数 x の値の範囲を

それぞれ数直線上に表すと右の図のようになるから、

命題「 $p \implies q$ 」は真であると言えます。



先生：正解です。では、 $a = 2$ のときも考えてみましょう。

太郎： $a = 2$ のとき、命題「 $p \implies q$ 」は であると言えます。

先生：そうですね。では、命題「 $p \implies q$ 」が真となるような a の値の範囲はどうなりますか。

太郎：命題「 $p \implies q$ 」が真となるような a の値の範囲は です。

先生：正解です。では、次に【課題Ⅱ】を考えてみましょう。

【課題Ⅱ】

b を実数の定数とする。実数 x に関する 2 つの条件 s, t を次のように定める。

$$s: 3 \leq x < 5$$

$$t: x < b \text{ または } b+1 < x$$

命題「 $s \implies t$ 」の真偽を調べよ。

先生：命題「 $s \implies t$ 」が真となるような b の値の範囲はどうなりますか。

太郎：【課題Ⅰ】と同じように数直線を利用して考えたら解けそうです。

- (1) にあてはまるものを、次の **1**、**2** のうちから一つ選び、番号で答えよ。

1 真 **2** 偽

- (2) にあてはまるものを、次の **1**～**4** のうちから一つ選び、番号で答えよ。

1 $0 < a < 3$ **2** $0 < a \leq 3$ **3** $3 < a$ **4** $3 \leq a$

- (3) 命題「 $s \implies t$ 」が真となるような b の値の範囲を求めよ。

配点

[2](1) 2点 (2) 2点 (3) 6点

解答

(1)

条件 p, q を満たす x の値の集合をそれぞれ P, Q とする。

$a = 2$ のとき

A ☐

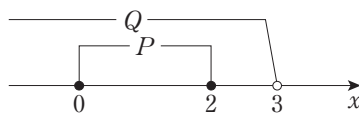
$$P = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

$$Q = \{x \mid x < 3\}$$

$P \subset Q$ であるから

B ☐

命題「 $p \implies q$ 」は真。(1)



答 1

◀条件 p, q を満たす x の値の集合をそれぞれ P, Q とするとき、命題「 $p \implies q$ 」が真であることと $P \subset Q$ が成り立つことは同値である。

完答への道のり

A $a = 2$ のとき条件 p を満たす x の値の集合 P を考えることができた。

B 命題「 $p \implies q$ 」の真偽を判定できた。

(2)

A ☐

命題「 $p \implies q$ 」が真となるのは、 $P \subset Q$ が成り立つときであるから、右の図のようになる。

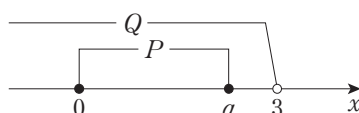
よって、これを満たす a の値の範囲は

$$a < 3$$

a は正の定数であるから

B ☐

$$0 < a < 3 \quad (1)$$



答 1

完答への道のり

A 命題「 $p \implies q$ 」が真となるための条件を考えることができた。

B 答えを求めることができた。

(3)

条件 s, t を満たす x の値の集合をそれぞれ S, T とする。

命題「 $s \implies t$ 」が真となるのは、

A ☐

$S \subset T$ が成り立つときであるから、右の図1，または図2のようになる。

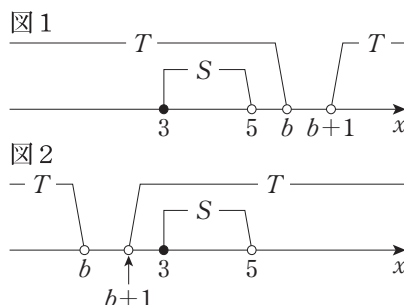
よって、これを満たす b の値の範囲は、 $5 \leq b$ または $b+1 < 3$

B ☐

すなわち $b < 2, 5 \leq b$

C ☐

すなわち $b < 2, 5 \leq b$



答 $b < 2, 5 \leq b$

◀ $S \subset T$ となるような図をかいて調べる。

◀ b の値によって、場合に分けて考える。

完答への道のり

A 命題「 $s \implies t$ 」が真となるための条件を考えることができた。

B b の値の範囲を2つの場合に分けて立式することができた。

C 答えを求めることができた。

3 2次関数 (20 点)

2 次関数 $f(x) = 2x^2 + ax$ がある。ただし、 a は定数とする。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表せ。
- (2) $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ における $f(x)$ の最大値が 6 となるような a の値を求めよ。
- (3) 2 次関数 $g(x) = -x^2 + 4x$ がある。 a を(2)で求めた値とし、 t は定数で $t > -2$ とする。
 $-2 \leq x \leq t$ における $f(x)$ の最小値を m 、 $-2 \leq x \leq t$ における $g(x)$ の最大値を M とするとき、 $M + m > -2t$ となるような t の値の範囲を求めよ。

配点

(1) 4 点 (2) 6 点 (3) 10 点

解答

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + ax \\ &= 2\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) \\ &= 2\left\{\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2\right\} \\ &= 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} \end{aligned}$$

よって、 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{4}, -\frac{a^2}{8}\right)$$

答 $\left(-\frac{a}{4}, -\frac{a^2}{8}\right)$

◀ 2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの頂点の座標は (p, q) である。

完答への道のり

Ⓐ $f(x)$ を平方完成することができた。

Ⓑ 答えを求めることができた。

(2)

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから、最大値を考えるときは、 x の定義域の中央 $x = -\frac{7}{4}$ とグラフの軸 $x = -\frac{a}{4}$ との位置関係によって、次のように場合に分けて考える。

(i) $-\frac{a}{4} \leq -\frac{7}{4}$, すなわち $a \geq 7$ のとき

$f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で最大となり、最大値は

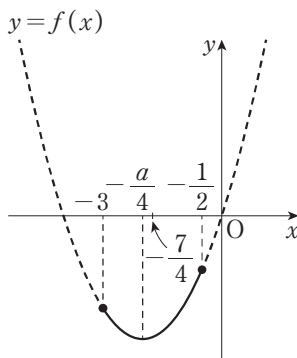
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2}$$

よって

$$\frac{1}{2} - \frac{a}{2} = 6 \quad a = -11$$

これは $a \geq 7$ を満たさないから不適。

(ii) $-\frac{a}{4} > -\frac{7}{4}$, すなわち $a < 7$ のとき



◀ 定義域 $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ の中央は

$$x = \frac{1}{2}\left\{-3 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = -\frac{7}{4}$$

である。

◀ $a = 7$ のとき、 $x = -\frac{1}{2}$ および $x = -3$ で最大となる。

◀ 軸 $x = -\frac{a}{4}$ が定義域の中央、または中央より左側にあるから、定義域の右端 $x = -\frac{1}{2}$ で最大となる。

◀ 場合分けの条件を満たしているかを吟味する。

F

G

H

$f(x)$ は $x = -3$ で最大となり、最大値は

$$f(-3) = 18 - 3a$$

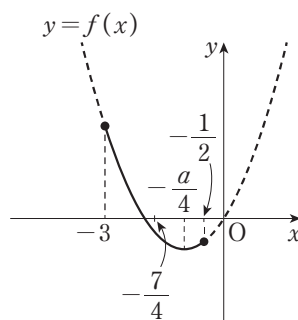
よって

$$18 - 3a = 6 \quad a = 4$$

これは $a < 7$ を満たすから適する。

(i), (ii)より、求める a の値は

$$a = 4$$



答 $a = 4$

◀軸 $x = -\frac{a}{4}$ が定義域の中央より右側にあるから、定義域の左端 $x = -3$ で最大となる。

◀場合分けの条件を満たしているかを吟味する。

完答への道のり

(A) (E) 定義域の中央と軸の位置関係から2つの場合に分けて考えることができた。

(B) (F) それぞれの場合において、 $f(x)$ の最大値を a を用いて表すことができた。

(C) (G) それぞれの場合において、 $f(x)$ の最大値が6となる a の値を求めることができた。

(D) (H) それぞれの場合において、 a の値が場合分けの条件を満たしているかを吟味することができた。

(3)

(2)より、 $a = 4$ であるから

$$f(x) = 2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$$

また

$$g(x) = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$$

よって、それぞれのグラフの軸 $x = -1$, $x = 2$ が定義域 $-2 \leq x \leq t$ に含まれるかどうかで場合に分けて考える。

(i) $-2 < t < -1$ のとき

$f(x)$ は $x = t$ で最小、 $g(x)$ は $x = t$ で最大となるから

$$m = f(t) = 2t^2 + 4t$$

$$M = g(t) = -t^2 + 4t$$

よって

$$M + m = (-t^2 + 4t) + (2t^2 + 4t)$$

$$= t^2 + 8t$$

$M + m > -2t$ より

$$t^2 + 8t > -2t$$

$$t^2 + 10t > 0$$

$$t(t+10) > 0$$

これを解くと $t < -10$, $0 < t$

これは $-2 < t < -1$ を満たさないから不適。

(ii) $-1 \leq t < 2$ のとき

$f(x)$ は $x = -1$ で最小、 $g(x)$ は $x = t$ で最大となるから

$$m = f(-1) = -2$$

$$M = g(t) = -t^2 + 4t$$

よって $M + m = -t^2 + 4t - 2$

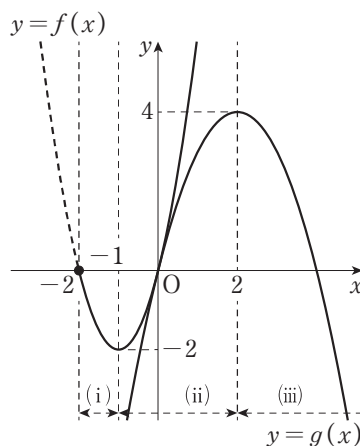
$M + m > -2t$ より

$$-t^2 + 4t - 2 > -2t$$

$$t^2 - 6t + 2 < 0$$

これを解くと $3 - \sqrt{7} < t < 3 + \sqrt{7}$

$-1 \leq t < 2$ より $3 - \sqrt{7} < t < 2$



◀ $f(x)$, $g(x)$ がそれぞれ最小値、最大値をとる x の値によって3つの場合に分けて考える。

◀ $y = f(x)$ のグラフの軸、 $y = g(x)$ のグラフの軸がどちらも定義域に含まれない場合。

◀場合分けの条件を満たしているかを吟味する。

◀ $y = f(x)$ のグラフの軸は定義域に含まれるが、 $y = g(x)$ のグラフの軸が定義域に含まれない場合。

◀ $4 < 7 < 9$ より $2 < \sqrt{7} < 3$

よって

$$0 < 3 - \sqrt{7} < 1, \quad 5 < 3 + \sqrt{7} < 6$$

◀場合分けの条件を満たしているかを吟味する。

G

(iii) $2 \leq t$ のとき $f(x)$ は $x = -1$ で最小, $g(x)$ は $x = 2$ で最大となるから

$$m = f(-1) = -2$$

$$M = g(2) = 4$$

よって

$$M + m = 4 - 2 = 2$$

$$M + m > -2t \text{ より}$$

$$2 > -2t$$

これを解くと $t > -1$ よって $2 \leq t$ (i)~(iii)より, 求める t の値の範囲は

$$t > 3 - \sqrt{7}$$

答 $t > 3 - \sqrt{7}$

◀ $y = f(x)$ のグラフの軸, $y = g(x)$ のグラフの軸がどちらも定義域に含まれる場合。

◀ 場合分けの条件を満たしているかを吟味する。

完答への道のり

A D G 最大値, 最小値をとる x の値によって3つの場合に分けて考えることができた。

B E H それぞれの場合において, $M + m > -2t$ から t についての不等式を立てることができた。

C F I それぞれの場合において, t についての不等式を解き, 場合分けの条件を満たしているかを吟味することができた。

J 答えを求めることができた。

4 図形と計量 (20 点)

$AB = 3$, $CA = \sqrt{3}$, $\cos \angle BAC = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ である $\triangle ABC$ がある。

- (1) 辺 BC の長さを求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ。また, $\triangle ABC$ の外接円の点 A を含まない弧 BC 上に, 点 D を線分 AD が $\triangle ABC$ の外接円の直径となるようにとる。このとき, $\sin \angle BAD$ の値を求めよ。
- (3) (2)のとき, 線分 AD と辺 BC の交点を E とする。 $\frac{BE}{EC}$ の値を求めよ。また, $\triangle ABE$ の外接円の半径を求めよ。

配点

(1) 5 点 (2) 6 点 (3) 9 点

解答

(1)

$\triangle ABC$ において, 余弦定理により

$$BC^2 = (\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= 18$$

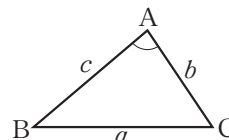
$$BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

答 $3\sqrt{2}$

◀ 余弦定理

$\triangle ABC$ において

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



A

B

完答への道のり

- A** 余弦定理を用いて辺 BC の長さを求める式を立てることができた。
B 答えを求めることができた。

(2)

$$\cos \angle BAC = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ であるから}$$

$$\sin^2 \angle BAC = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6}{9}$$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ より $\sin \angle BAC > 0$ であるから

$$\sin \angle BAC = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$$

$$R = \frac{BC}{2\sin \angle BAC}$$

$$= 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

次に、線分 AD は $\triangle ABC$ の外接円の直径であるから

$$AD = 2R = 3\sqrt{3}$$

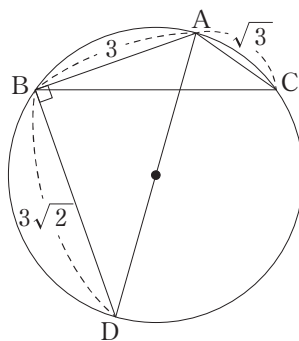
また、 $\angle ABD = 90^\circ$ であるから、 $\triangle ABD$ において三平方の定理により

$$BD = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

よって

$$\sin \angle BAD = \frac{BD}{AD} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

図 外接円の半径 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{6}}{3}$



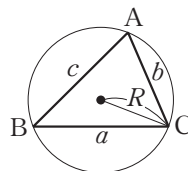
◀ 三角比の相互関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

◀ 正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

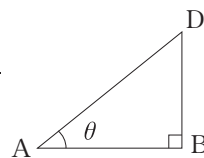
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



◀ 半円の弧に対する円周角は直角となる。

◀ 鋭角の三角比

$$\sin \theta = \frac{BD}{AD}$$



完答への道のり

- A** 三角比の相互関係を用いて、 $\sin \angle BAC$ の値を求めることができた。
B 正弦定理を用いて、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めることができた。
C $\triangle ABD$ において、三平方の定理を用いて BD の長さを求めることができた。
D $\sin \angle BAD$ の値を求めることができた。

(3) $\triangle ADC$ において $\angle ACD = 90^\circ$ であるから、三平方の定理により

$$CD = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

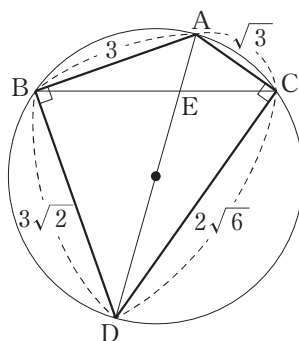
$BE:EC = \triangle ABD:\triangle ADC$ であるから、それぞれの三角形の面積を求めると

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 3\sqrt{2}$$

よって

$$\frac{BE}{EC} = \frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}$$



◀ $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ は辺 AD が共通であるから、面積の比は高さの比に等しい。また、2点 B, C から線分 AD に対して垂線 BH, CI をそれぞれ引くと、 $\triangle BHE \sim \triangle CIE$ であるから $BE:EC = BH:CI$ が成り立つ。よって、 $BE:EC = \triangle ABD:\triangle ADC$ が成り立つ。

B ☐C ☐D ☐

$$= \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2}$$

したがって

$$BE = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{5}$$

 $\triangle ABE$ の外接円の半径を R' とすると、正弦定理により

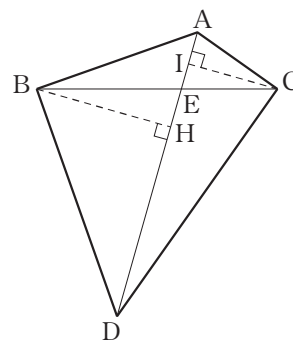
$$\frac{BE}{\sin \angle BAE} = 2R'$$

$$R' = \frac{BE}{2 \sin \angle BAE}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{10}$$

答 $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$, 外接円の半径 $\frac{9\sqrt{3}}{10}$



$$\blacktriangleleft \sin \angle BAE = \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

完答への道のり

A $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ の面積をそれぞれ求めることができた。B $\triangle ABD$ と $\triangle ADC$ の面積比が $BE:EC$ であることを用いて, $\frac{BE}{EC}$ の値を求めることができた。C BE の長さを求めることができた。D 正弦定理を用いて, $\triangle ABE$ の外接円の半径を求めることができた。

5 確率 (20 点)

袋の中に, 1, 2, 3, 4 の数が 1 つずつ書かれた 4 個の赤玉と, 1, 2, 3 の数が 1 つずつ書かれた 3 個の青玉, 1, 2 の数が 1 つずつ書かれた 2 個の白玉の全部で 9 個の玉が入っている。この袋から同時に 3 個の玉を取り出す。

- (1) 取り出した玉がすべて赤玉である確率を求めよ。
- (2) 取り出した玉に書かれた数の和が 4 である確率を求めよ。また, 取り出した玉に書かれた数の和が 5 である確率を求めよ。
- (3) 取り出した玉に書かれた数の和が 6 以下である確率を求めよ。また, 取り出した玉に書かれた数の和が 6 であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる確率を求めよ。

配点

(1) 5 点 (2) 7 点 (3) 8 点

解答

(1)

起こり得るすべての場合の数は

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

このうち, 取り出した玉がすべて赤玉であるのは

◀組合せ

異なる n 個のものから r 個取り出す組合せの総数は

$${}_nC_r = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 2 \cdot 1} \text{ (通り)}$$

B ☐

$${}_4C_3 = 4 \text{ (通り)}$$

したがって、求める確率は

C ☐

$$\frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

答 $\frac{1}{21}$

◀確率の定義

事象 A の起こる確率 $P(A)$ は、全事象に含まれる根元事象の個数を $n(U)$ 、事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ とするとき

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

完答への道のり

A 組合せの考えを用いて、起こり得るすべての場合の数を求めることができた。

B 条件を満たす場合の数を求めることができた。

C 答えを求めることができた。

(2)

[数の和が4である確率]

A ☐

3つの数の和が4であるのは、取り出した玉に書かれた数の組合せが1, 1, 2のときである。

1が書かれた玉の選び方が ${}_3C_2$ 通りあり、その各々に対して、2が書かれた玉の選び方は ${}_3C_1$ 通りあるから、数の和が4である場合の数は

B ☐

$${}_3C_2 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9 \text{ (通り)}$$

したがって、求める確率は

C ☐

$$\frac{9}{84} = \frac{3}{28}$$

[数の和が5である確率]

D ☐

3つの数の和が5であるのは、取り出した玉に書かれた数の組合せが1, 2, 2または1, 1, 3のときである。

数の組合せが1, 2, 2のとき ${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9 \text{ (通り)}$

数の組合せが1, 1, 3のとき ${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 3 \times 2 = 6 \text{ (通り)}$

よって、数の和が5である場合の数は

E ☐

$$9 + 6 = 15 \text{ (通り)}$$

したがって、求める確率は

F ☐

$$\frac{15}{84} = \frac{5}{28}$$

答 数の和が4である確率 $\frac{3}{28}$ 数の和が5である確率 $\frac{5}{28}$

◀先に数の組合せを決め、次に取り出す玉の色を調べる。

◀1が書かれた3個の玉から2個を選び、2が書かれた3個の玉から2個を選ぶ。

◀1が書かれた玉の選び方の場合の数と、2が書かれた玉の選び方の場合の数を掛け合わせる。

◀1が書かれた玉と2が書かれた玉は3個ずつある。

◀1が書かれた玉は3個、3が書かれた玉は2個ある。

完答への道のり

A 3つの数の和が4である場合が1, 1, 2のときのみであることに気づくことができた。

B 数の和が4である場合の数を求めることができた。

C 数の和が4である確率を求めることができた。

D 3つの数の和が5である場合が1, 2, 2または1, 1, 3のときであることに気づくことができた。

E 数の和が5である場合の数を求めることができた。

F 数の和が5である確率を求めることができた。

(3)

[数の和が6以下である確率]

3つの数の和が6以下であるのは、数の和が3, 4, 5, 6のときである。

(i) 数の和が3であるとき

A ☐

1が書かれた玉を3個取り出す場合であるから ${}_3C_3 = 1 \text{ (通り)}$

(ii) 数の和が4であるとき

(2)より, 9通り。

(iii) 数の和が5であるとき

(2)より, 15通り。

(iv) 数の和が6であるとき

数の組合せが1, 2, 3のとき ${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 18$ (通り)

数の組合せが1, 1, 4のとき ${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3$ (通り)

数の組合せが2, 2, 2のとき ${}_3C_3 = 1$ (通り)

よって, 数の和が6である場合の数は

$$18 + 3 + 1 = 22 \text{ (通り)}$$

以上より, 数の和が6以下である場合の数は

$$1 + 9 + 15 + 22 = 47 \text{ (通り)}$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{47}{84}$$

[数の和が6であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる確率]

数の和が6であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる場合の数を求める。

数の組合せが1, 2, 3のとき

白玉に書かれた数が1のとき, 他の2個の玉の取り出し方は2通り。

白玉に書かれた数が2のときも2通りあるから

$$2 + 2 = 4 \text{ (通り)}$$

数の組合せが1, 1, 4のとき

青玉と白玉に書かれた数が1で, 赤玉に書かれた数が4の場合のみであるから, 1通り。

数の組合せが2, 2, 2のとき, 1通り。

よって, 数の和が6であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる場合の数は

$$4 + 1 + 1 = 6 \text{ (通り)}$$

したがって, 求める確率は

$$\frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

$$\text{答} \quad \text{数の和が6以下である確率} \quad \frac{47}{84}$$

$$\text{数の和が6であり, かつ, 玉の色がすべて異なる確率} \quad \frac{1}{14}$$

◀先に数の組合せを決め, 次に取り出す玉の色を調べる。

◀2個しかない白玉に着目して考える。また2個しかない3が書かれた玉に着目して, 次のように考えてもよい。3が書かれた玉が赤色のとき, 他の2個の玉の取り出し方は2通り。3が書かれた玉が青色のときも2通りあるから

$$2 + 2 = 4 \text{ (通り)}$$

完答への道のり

- Ⓐ 数の和が3である場合の数を求めることができた。
- Ⓑ 数の和が6である場合が1, 2, 3または1, 1, 4または2, 2, 2のときであることに気づくことができた。
- Ⓒ 数の和が6である場合の数を求めることができた。
- Ⓓ 数の和が6以下である場合の数を求めることができた。
- Ⓔ 数の和が6以下である確率を求めることができた。
- Ⓕ 数の和が6であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる3つの場合について考えることができた。
- Ⓖ 数の和が6であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる場合の数を求めることができた。
- Ⓗ 数の和が6であり, かつ, 取り出した玉の色がすべて異なる確率を求めることができた。

6 図形の性質 (20 点)

AB = 9 の $\triangle ABC$ があり、辺 BC 上に BD = 6 となる点 D をとる。また、点 A を通り、点 D で辺 BC に接する円を O とし、円 O と辺 AB の交点のうち、A でない方の点を E とする。



- (1) 線分 BE の長さを求めよ。
- (2) 2 直線 AD, CE の交点を F とする。線分 BF が $\angle ABD$ の二等分線であるとき、 $\frac{DF}{FA}$ の値を求めよ。また、 $\angle ADE = \angle ADC$ となるとき、線分 AD の長さを求めよ。
- (3) (2) の点 F について、線分 BF が $\angle ABD$ の二等分線であるとする。このとき、 $\frac{BC}{CD}$ の値と $\frac{EF}{FC}$ の値をそれぞれ求めよ。

配点

(1) 5 点 (2) 7 点 (3) 8 点

解答

(1)

方べきの定理により

$$BE \cdot BA = BD^2$$

BA = 9, BD = 6 であるから

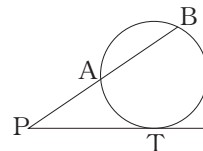
$$BE \cdot 9 = 6^2$$

$$BE = 4$$

◀方べきの定理

下の図で、PT が円の接線であるとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$



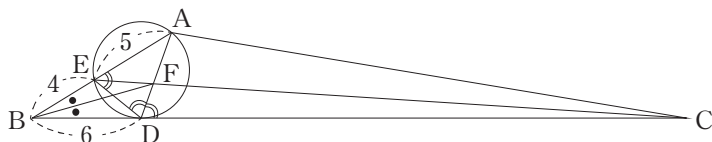
答 BE = 4

完答への道のり

◀方べきの定理を用いて、線分 BE の長さについての関係式を立てることができた。

◀線分 BE の長さを求めることができた。

(2)



線分 BF が $\angle ABD$ の二等分線であるから

$$DF : FA = BD : BA = 6 : 9 = 2 : 3$$

$$\text{よって } \frac{DF}{FA} = \frac{2}{3}$$

次に、接線と弦の作る角の定理により

$$\angle AED = \angle ADC$$

よって、 $\angle ADE = \angle ADC$ となるとき

$$\angle AED = \angle ADE$$

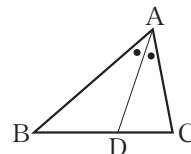
したがって、 $\triangle AED$ は $AE = AD$ の二等辺三角形である。

(1)より

◀角の二等分線の性質

下の図で、線分 AD が $\angle A$ の二等分線であるとき

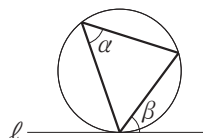
$$BD : DC = AB : AC$$



◀接線と弦の作る角の定理

直線 ℓ が円の接線であるとき、下の図で

$$\alpha = \beta$$



$$AE = BA - BE = 9 - 4 = 5$$

であるから

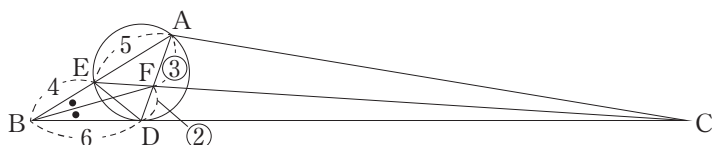
$$AD = AE = 5$$

$$\text{答} \quad \frac{DF}{FA} = \frac{2}{3}, \quad AD = 5$$

完答への道のり

- Ⓐ 角の二等分線の性質を用いて、 $DF:FA$ を求めることができた。
- Ⓑ $\frac{DF}{FA}$ の値を求めることができた。
- Ⓒ 接線と弦の作る角の定理により、 $\triangle AED$ が二等辺三角形であることに気づくことができた。
- Ⓓ 線分 AD の長さを求めることができた。

(3)



$\frac{DF}{FA} = \frac{2}{3}$ であるから、 $\triangle ABD$ と直線 EC において、メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$$

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = 1$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{6}{5}$$

よって、 $BD:BC = 1:6$ であるから

$$BC = 6BD = 6 \cdot 6 = 36$$

線分 BF が $\angle EBC$ の二等分線であるから、 $\triangle EBC$ において

$$EF:FC = BE:BC = 4:36 = 1:9$$

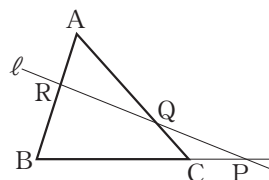
$$\text{よって} \quad \frac{EF}{FC} = \frac{1}{9}$$

$$\text{答} \quad \frac{BC}{CD} = \frac{6}{5}, \quad \frac{EF}{FC} = \frac{1}{9}$$

◀メネラウスの定理

$\triangle ABC$ の辺 BC , CA , AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線 ℓ と、それぞれ点 P , Q , R で交わる時

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



完答への道のり

- Ⓐ メネラウスの定理を用いて、 $\frac{BC}{CD}$ についての関係式を立てることができた。
- Ⓑ $\frac{BC}{CD}$ の値を求めることができた。
- Ⓒ 線分 BC の長さを求めることができた。
- Ⓓ 角の二等分線の性質を用いて、 $EF:FC$ を求めることができた。
- Ⓔ $\frac{EF}{FC}$ の値を求めることができた。

$\left[\frac{EF}{FC} \right]$ の値を求める別解

$\triangle CEB$ と直線 DA において、メネラウスの定理により

$$\frac{BA}{AE} \cdot \frac{EF}{FC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{EF}{FC} \cdot \frac{5}{1} = 1$$

$$\frac{EF}{FC} = \frac{1}{9}$$