

数 学

数 学

1 小問集合 (20 点)

次の を正しくうめよ。ただし、解答欄には答えのみを記入せよ。

- (1) $(\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2)(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$ を計算すると (ア) となる。
- (2) 実数 a, b ($a < b$) があり、 $a^2 + b^2 = 30$, $ab = 8$ を満たしている。このとき、
 $(a - b)^2 =$ (イ) であり、 $a - b =$ (ウ) である。
- (3) 2 次方程式 $2x^2 + x + a = 0$ (a は定数) が重解をもつとき、 $a =$ (エ) であり、その
ときの重解は $x =$ (オ) である。
- (4) ある高校の書道部と美術部の部員数はどちらも x 人である。この 2 つの部に記念品の鉛筆が N 本ずつ贈られた。書道部では、部員に 4 本ずつ鉛筆を配ったところ、58 本余った。このとき、 N は x を用いて $N =$ (カ) と表される。また、美術部では、部員に 8 本ずつ鉛筆を配ろうとしたが、最後の 1 人だけもらえる鉛筆は 8 本より少なくなった。このとき、 x の値をすべて求めると、 $x =$ (キ) である。

解答・配点

- (1) ア $4 + 2\sqrt{15}$ (5 点)
- (2) イ 14 (3 点)
ウ $-\sqrt{14}$ (2 点)
- (3) エ $\frac{1}{8}$ (3 点)
オ $-\frac{1}{4}$ (2 点)
- (4) カ $4x + 58$ (2 点)
キ 15, 16 (3 点)

解法

- (1)
- $$\begin{aligned}(\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2)(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2) &= \{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + 2\}\{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 2\} \\&= (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 2^2 \\&= 5 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 3 - 4 \\&= 4 + 2\sqrt{15}\end{aligned}$$
- (2)
- $$\begin{aligned}(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\&= (a^2 + b^2) - 2ab = 30 - 2 \cdot 8 = 14 \\a < b \text{ より, } a - b < 0 \text{ であるから} \\a - b &= -\sqrt{14}\end{aligned}$$

◀展開の公式

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

◀展開の公式

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(3)

2 次方程式 $2x^2+x+a=0$ の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot 2\cdot a=1-8a$$

2 次方程式が重解をもつための条件は $D=0$ であるから

$$1-8a=0$$

$$\text{よって } a=\frac{1}{8}$$

このとき、2 次方程式は

$$2x^2+x+\frac{1}{8}=0$$

$$16x^2+8x+1=0$$

$$(4x+1)^2=0$$

$$x=-\frac{1}{4}$$

(4)

書道部の x 人の部員に、 N 本の鉛筆を 1 人に 4 本ずつ配ると 58 本余るから

$$N=4x+58$$

また、美術部の x 人の部員に、 N 本の鉛筆を 1 人に 8 本ずつ配ろうとすると、最後の 1 人だけもらえる鉛筆は 0 本以上 8 本未満となるから、 N は $8x-8$ 以上 $8x$ 未満である。

したがって

$$8x-8\leq 4x+58<8x$$

すなわち

$$\begin{cases} 8x-8\leq 4x+58 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x+58<8x & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

①より

$$4x\leq 66$$

$$x\leq \frac{33}{2}$$

②より

$$-4x<-58$$

$$x>\frac{29}{2}$$

$$\frac{33}{2}=16.5, \frac{29}{2}=14.5 \text{ であるから } 14.5<x\leq 16.5$$

これにあてはまる自然数 x は $x=15, 16$

◀ 2 次方程式の解の判別

$$2 \text{ 次方程式 } ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{*}$$

の判別式を D とすると、 $D=b^2-4ac$ であり

$$\textcircled{*} \text{ が重解をもつ } \iff D=0$$

◀ 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重

$$\text{解は } x=-\frac{b}{2a}$$

$$x=-\frac{1}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4} \text{ と求めてもよい。}$$

◀ 1 人に 8 本ずつ配ろうとした場合の条件から、鉛筆の本数の範囲を考える。

$$\textcircled{*} 8x-8\leq 4x+58\leq 8x-1$$

としてもよい。

2

[1] 数と式 (10 点)

x の不等式 $|x-3|\leq 7 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$, $(5-3\sqrt{3})x<5\sqrt{3}(5-3\sqrt{3})+2 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$ がある。

(1) $\frac{2}{5-3\sqrt{3}}$ の分母を有理化し、簡単にせよ。

(2) 不等式①, ②をともに満たすような整数 x の個数を求めよ。

配点

(1) 3 点 (2) 7 点

解答

(1)

A ☐

$$\begin{aligned}\frac{2}{5-3\sqrt{3}} &= \frac{2(5+3\sqrt{3})}{(5-3\sqrt{3})(5+3\sqrt{3})} \\ &= \frac{2(5+3\sqrt{3})}{25-27} \\ &= -5-3\sqrt{3}\end{aligned}$$

B ☐

答 $-5-3\sqrt{3}$

◀分母の有理化

$b > 0, a^2 \neq b$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-\sqrt{b}} &= \frac{a+\sqrt{b}}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})} \\ &= \frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}\end{aligned}$$

完答への道のり

A 有理化するために、分母・分子に $5+3\sqrt{3}$ を掛けることができた。

B 分母を有理化し、簡単にできた。

(2)

$$|x-3| \leq 7 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

より

$$-7 \leq x-3 \leq 7$$

A ☐

$$-4 \leq x \leq 10 \dots\dots\dots \textcircled{1}'$$

$$(5-3\sqrt{3})x < 5\sqrt{3}(5-3\sqrt{3})+2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

において、 $5-3\sqrt{3} < 0$ であるから、②の両辺を $5-3\sqrt{3}$ で割ると

$$x > 5\sqrt{3} + \frac{2}{5-3\sqrt{3}}$$

$$x > 5\sqrt{3} - 5 - 3\sqrt{3}$$

B ☐

$$x > 2\sqrt{3} - 5 \dots\dots\dots \textcircled{2}'$$

$3 < 2\sqrt{3} < 4$ より、 $-2 < 2\sqrt{3} - 5 < -1$ であるから、①'、②'を同時に満たす x の値の範囲は

C ☐

$$2\sqrt{3} - 5 < x \leq 10$$

D ☐

この不等式を満たす整数 x は、 $-1, 0, 1, 2, \dots, 10$ であり、合計 12 個ある。

答 12 個

◀絶対値を含む不等式の解

$c > 0$ のとき

$$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$$

◀両辺を負の数で割ると、不等号の向きが反対になる。

◀(1)の結果から

$$\frac{2}{5-3\sqrt{3}} = -5-3\sqrt{3}$$

完答への道のり

A 不等式①を満たす x の値の範囲を求めることができた。

B 不等式②を満たす x の値の範囲を求めることができた。

C 不等式①、②を同時に満たす x の値の範囲を求めることができた。

D 答えを求めることができた。

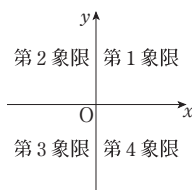
2 [2] 2次関数 (10点)

放物線 $C: y = x^2 - 2x + a^2 - 2a - 2$ がある。ただし、 a は定数とする。

- (1) 放物線 C の頂点が x 軸上にあるとき、 a の値を求めよ。
 (2) 座標平面は、 x 軸、 y 軸によって4つの部分に分けられる。これらの各部分を象限とい

い、右の図のように

x 座標、 y 座標がともに正である部分を第1象限、
 x 座標が負で、 y 座標が正である部分を第2象限、
 x 座標、 y 座標がともに負である部分を第3象限、
 x 座標が正で、 y 座標が負である部分を第4象限



という。ただし、 x 軸、 y 軸上の点はどの象限にも属さないものとする。

放物線 C が第1象限、第2象限、第4象限をすべて通り、第3象限は通らないような a の値の範囲を求めよ。

配点

- (1) 4点 (2) 6点

解答

(1)

$$y = x^2 - 2x + a^2 - 2a - 2 \\ = (x-1)^2 + a^2 - 2a - 3$$

放物線 C の頂点の座標は

$$(1, a^2 - 2a - 3)$$

この頂点が x 軸上にあるとき

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0$$

$$a = -1, 3$$

◀放物線 C が x 軸と接するため
 $x^2 - 2x + a^2 - 2a - 2 = 0$ の判別式を
 D とし、 $D = 0$ を解いてもよい。

◀2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグ
 ラフの頂点は、点 (p, q) である。

答 $a = -1, 3$

完答への
道のり

- A 放物線 C の式を平方完成することができた。
 B 放物線 C の頂点の座標を求めることができた。
 C a についての2次方程式を立てることができた。
 D 答えを求めることができた。

(2)

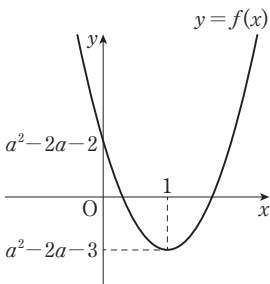
$$f(x) = x^2 - 2x + a^2 - 2a - 2 \text{ とする。}$$

放物線 C が第1象限、第2象限、第4象限
 をすべて通り、第3象限は通らない条件は、
 $y = f(x)$ のグラフが右の図のように、頂点が
 第4象限にあり、かつ、 y 軸の $y \geq 0$ の部分
 と交わることである。

すなわち

$$a^2 - 2a - 3 < 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{かつ } f(0) \geq 0$$



◀ $y = f(x)$ のグラフの軸は直線 $x = 1$
 である。

◀①は、2次方程式 $f(x) = 0$ の判
 別式 $D > 0$ を解いてもよい。

◀等号の有無に注意する。

すなわち

$$a^2 - 2a - 2 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より

$$(a+1)(a-3) < 0$$

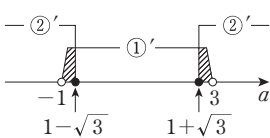
$$-1 < a < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{より } a \leq 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \leq a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}'$$

①', ②' を同時に満たす a の値の範囲は

$$-1 < a \leq 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \leq a < 3$$

$$\text{答 } -1 < a \leq 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} \leq a < 3$$



◀ $\alpha < \beta$ のとき, 2 次不等式
 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ の解は
 $\alpha < x < \beta$

◀ $\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$ より

$$1 < \sqrt{3} < 2$$

これより

$$-1 < 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3} < 3$$

完答への
道のり

Ⓐ 与えられた条件から, 放物線 C の頂点の位置と y 軸との交点の位置に気づくことができた。

Ⓑ 頂点の位置から a についての 2 次不等式を立てることができた。

Ⓒ y 軸との交点の位置から a についての 2 次不等式を立てることができた。

Ⓓ 答えを求めることができた。

3 2 次関数 (20 点)

2 次関数 $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 7$ がある。また, $y = -x^2$ のグラフを x 軸方向に a , y 軸方向に $2a^2 + 2a - 24$ だけ平行移動したグラフを表す 2 次関数を $y = g(x)$ とする。ただし, a は定数である。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を a を用いて表せ。

(2) すべての実数 x に対して, $f(x) > 0$ かつ $g(x) < 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(3) $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x に対して, $f(x) > 0$ かつ $g(x) < 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

配点

(1) 4 点 (2) 7 点 (3) 9 点

解答

(1)

$$f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 7$$

$$= \{x - (a-1)\}^2 + a^2 + 2a - 8$$

$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$(a-1, a^2 + 2a - 8)$$

$$\text{答 } (a-1, a^2 + 2a - 8)$$

◀ 2 次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフの頂点は, 点 (p, q) である。

完答への
道のり

Ⓐ $f(x)$ を平方完成することができた。

Ⓑ 答えを求めることができた。

(2)

すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となるための条件は, $y = f(x)$ のグラ

フが下に凸の放物線であるから、頂点の y 座標が正であることである。

$$a^2 + 2a - 8 > 0$$

$$(a+4)(a-2) > 0$$

$$a < -4, 2 < a \dots\dots\dots ①$$

また、 $y = -x^2$ のグラフを x 軸方向に a 、 y 軸方向に $2a^2 + 2a - 24$ だけ平行移動したグラフを表す 2 次関数は

$$y - (2a^2 + 2a - 24) = -(x - a)^2$$

すなわち

$$g(x) = -(x - a)^2 + 2a^2 + 2a - 24$$

すべての実数 x に対して $g(x) < 0$ となるための条件は、 $y = g(x)$ のグラフが上に凸の放物線であるから、頂点の y 座標が負であることである。

$$2a^2 + 2a - 24 < 0$$

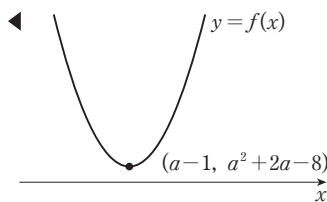
$$a^2 + a - 12 < 0$$

$$(a+4)(a-3) < 0$$

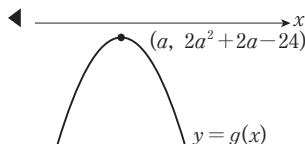
$$-4 < a < 3 \dots\dots\dots ②$$

①、②を同時に満たす a の値の範囲は $2 < a < 3$

答 $2 < a < 3$



◀ $y = g(x)$ のグラフの頂点が点 $(a, 2a^2 + 2a - 24)$ であることから求めることもできる。



完答への道のり

◀ A すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となるための条件を a の不等式で表すことができた。

◀ B すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となるような a の値の範囲を求めることができた。

◀ C 2 次関数 $y = g(x)$ を求めることができた。

◀ D すべての実数 x に対して $g(x) < 0$ となるための条件を a の不等式で表すことができた。

◀ E すべての実数 x に対して $g(x) < 0$ となるような a の値の範囲を求めることができた。

◀ F 答えを求めることができた。

(3)

$x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値を m 、 $g(x)$ の最大値を M とすると、 $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x に対して、 $f(x) > 0$ かつ $g(x) < 0$ となるための条件は、 $m > 0$ かつ $M < 0$ である。

(i) $a < 0$ のとき

$x \geq 0$ において

$f(x)$ は $x = 0$ で最小となり、 $g(x)$ は

$x = 0$ で最大となるから

$$m = f(0) = 2a^2 - 7$$

$$M = g(0) = a^2 + 2a - 24$$

$m > 0$ より

$$2a^2 - 7 > 0$$

$$a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2} < a \dots\dots\dots ③$$

$M < 0$ より

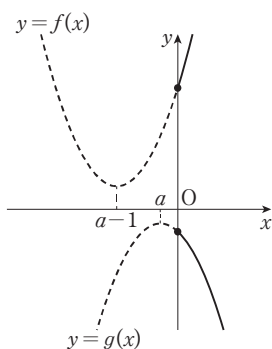
$$a^2 + 2a - 24 < 0$$

$$(a+6)(a-4) < 0$$

$$-6 < a < 4 \dots\dots\dots ④$$

$a < 0$ と③、④を同時に満たす a の値の範囲は

$$-6 < a < -\frac{\sqrt{14}}{2}$$

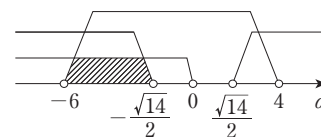


◀ 軸について、 $a-1 < a$ であることに注意する。

◀ $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ のグラフの軸がともに $x < 0$ の部分にあるとき。

◀ $3 < \sqrt{14} < 4$ より

$$\frac{3}{2} < \frac{\sqrt{14}}{2} < 2, -2 < -\frac{\sqrt{14}}{2} < -\frac{3}{2}$$



F

(ii) $0 \leq a < 1$ のとき $x \geq 0$ において $f(x)$ は $x=0$ で最小となり, $g(x)$ は $x=a$ で最大となるから

$$m = f(0) = 2a^2 - 7$$

$$M = g(a) = 2a^2 + 2a - 24$$

 $m > 0$ より

$$a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2} < a \dots\dots\dots ③$$

 $M < 0$ より

$$2a^2 + 2a - 24 < 0$$

$$-4 < a < 3 \dots\dots\dots ⑤$$

 $0 \leq a < 1$ と ③, ⑤ を同時に満たす a の値はない。(iii) $1 \leq a$ のとき $x \geq 0$ において $f(x)$ は $x=a-1$ で最小となり, $g(x)$ は $x=a$ で最大となるから

$$m = f(a-1) = a^2 + 2a - 8$$

$$M = g(a) = 2a^2 + 2a - 24$$

 $m > 0$ より

$$a^2 + 2a - 8 > 0$$

$$a < -4, 2 < a \dots\dots\dots ⑥$$

 $M < 0$ より

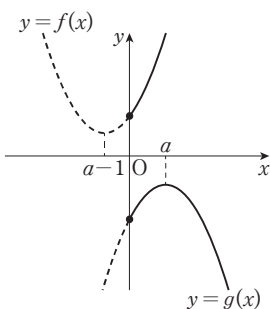
$$-4 < a < 3 \dots\dots\dots ⑤$$

 $1 \leq a$ と ⑤, ⑥ を同時に満たす a の値の範囲は

$$2 < a < 3$$

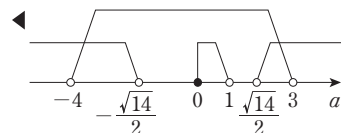
(i)~(iii)より, 求める a の値の範囲は

$$-6 < a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, 2 < a < 3$$



◀ $y=f(x)$ のグラフの軸が $x < 0$ の部分にあり, $y=g(x)$ のグラフの軸が $x \geq 0$ の部分にあるとき。

◀ ⑤は(2)で求めた②と同じである。



◀ $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフの軸がともに $x \geq 0$ の部分にあるとき。

◀ ⑥は(2)で求めた①と同じである。

$$\text{答 } -6 < a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, 2 < a < 3$$

完答への道のり

A 問題の条件を, $x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値が正, かつ, $g(x)$ の最大値が負であることと置き換えて考えることができた。

B F J $y=f(x)$, $y=g(x)$ のグラフの軸の位置に注目して3つの場合に分けて考えることができた。

C G K それぞれの場合について, $x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値が正であることより, a の値の範囲を求めることができた。

D H L それぞれの場合について, $x \geq 0$ における $g(x)$ の最大値が負であることより, a の値の範囲を求めることができた。

E I M それぞれの場合について, $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x に対して, つねに $f(x) > 0$ かつ $g(x) < 0$ となるような a の値の範囲を求めることができた。

[別解]

(i) $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となるための条件は, $x \geq 0$ における $f(x)$ の最小値が正となることである。

(ii) $x \geq 0$ を満たすすべての実数 x に対して $g(x) < 0$ となるための条件は, $x \geq 0$ における $g(x)$ の最大値が負となることである。

(i)(ア) $a-1 < 0$, すなわち $a < 1$ のとき
 $x \geq 0$ において $f(x)$ は $x=0$ で最小値 $2a^2-7$ をとるから,
 $2a^2-7 > 0$ より $a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2} < a$ ⑦
 $a < 1$ と⑦を同時に満たす a の値の範囲は
 $a < -\frac{\sqrt{14}}{2}$

(イ) $a-1 \geq 0$, すなわち $a \geq 1$ のとき
 $x \geq 0$ において $f(x)$ は $x=a-1$ で最小値 a^2+2a-8 をとるから,
 $a^2+2a-8 > 0$ より $a < -4, 2 < a$ ⑧
 $a \geq 1$ と⑧を同時に満たす a の値の範囲は $2 < a$
(ア), (イ)より, a の値の範囲は
 $a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, 2 < a$

(ii)(ウ) $a < 0$ のとき
 $x \geq 0$ において $g(x)$ は $x=0$ で最大値 $a^2+2a-24$ をとるから,
 $a^2+2a-24 < 0$ より
 $-6 < a < 4$ ⑨
 $a < 0$ と⑨を同時に満たす a の値の範囲は $-6 < a < 0$

(エ) $a \geq 0$ のとき
 $x \geq 0$ において $g(x)$ は $x=a$ で最大値 $2a^2+2a-24$ をとるから,
 $2a^2+2a-24 < 0$ より
 $-4 < a < 3$ ⑩
 $a \geq 0$ と⑩を同時に満たす a の値の範囲は $0 \leq a < 3$
(ウ), (エ)より, a の値の範囲は
 $-6 < a < 3$

(i), (ii)より, 求める a の値の範囲は $-6 < a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, 2 < a < 3$

答 $-6 < a < -\frac{\sqrt{14}}{2}, 2 < a < 3$

◀(i), (ii)で求めた a の値の共通範囲を求める。

4 図形と計量 (20 点)

△ABC は鋭角三角形で, $BC=2, AC=4$ である。また, △ABC の面積は $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ である。

(1) $\sin \angle ACB$ の値を求めよ。

(2) 辺 AB の長さを求めよ。また, 辺 BC の C の側の延長線上に点 D をとるとき, $\cos \angle ACD$ の値を求めよ。

(3) (2)の点 D を, △ACD の外接円の半径が △ABC の外接円の半径の 2 倍となるようにとる。線分 AD の長さを求めよ。また, △ABD の面積を求めよ。

配点

(1) 5 点 (2) 6 点 (3) 9 点

解答

(1)

$\angle ACB = \theta$ とすると

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \sin \theta = 4 \sin \theta$$

$\triangle ABC$ の面積が $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ であるから

$$4 \sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

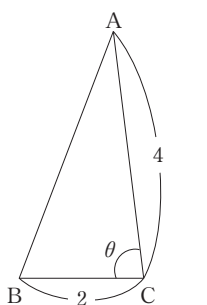
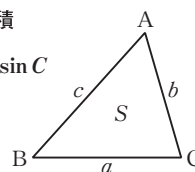


図 $\frac{3\sqrt{7}}{8}$

◀ 三角形の面積

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$



完答への道のり

◀ A 三角形の面積公式を用いて、 $\sin \angle ACB$ について式を立てることができた。

◀ B 答えを求めることができた。

(2)

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{7}}{8} \right)^2 = \frac{1}{64}$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形より、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから $\cos \theta > 0$

よって $\cos \theta = \frac{1}{8}$

$\triangle ABC$ において、余弦定理により

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 18$$

$AB > 0$ より $AB = 3\sqrt{2}$

また

$$\cos \angle ACD = \cos(180^\circ - \theta)$$

$$= -\cos \theta$$

$$= -\frac{1}{8}$$

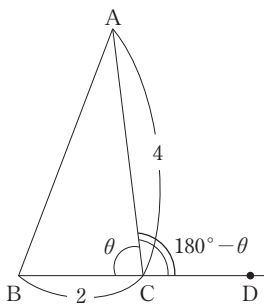


図 $AB = 3\sqrt{2}$, $\cos \angle ACD = -\frac{1}{8}$

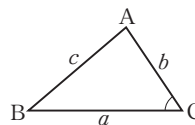
◀ 三角比の相互関係

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

◀ 余弦定理

$\triangle ABC$ において

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



◀ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$

完答への道のり

◀ A 三角比の相互関係を用いて、 $\cos \angle ACB$ の値を求めることができた。

◀ B 余弦定理を用いて、 AB^2 について式を立てることができた。

◀ C 辺 AB の長さを求めることができた。

◀ D $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$ であることから $\cos \angle ACD$ の値を求めることができた。

(3)

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R_1 ,

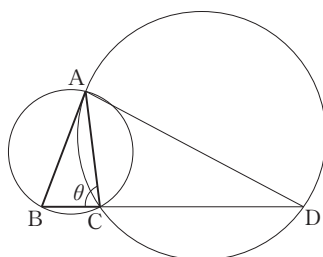
$\triangle ACD$ の外接円の半径を R_2 とする。

$\triangle ABC$ において、正弦定理により

$$2R_1 = \frac{AB}{\sin \theta}$$

$$R_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2 \sin \theta}$$

また

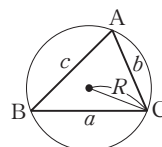


◀ 正弦定理

$\triangle ABC$ において

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R は $\triangle ABC$ の外接円の半径)



$$\sin \angle ACD = \sin (180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

であるから、 $\triangle ACD$ において正弦定理により

$$2R_2 = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$$

$$R_2 = \frac{AD}{2\sin \theta}$$

$R_2 = 2R_1$ であるから

$$\frac{AD}{2\sin \theta} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2\sin \theta}$$

よって $AD = 6\sqrt{2}$

次に、 $CD = x$ とする。 $\triangle ACD$ において、余弦定理により

$$(6\sqrt{2})^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$72 = x^2 + x + 16$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$(x+8)(x-7) = 0$$

$x > 0$ より $x = 7$

よって $\triangle ABC : \triangle ABD = BC : BD = 2 : 9$

したがって、 $\triangle ABD$ の面積は

$$\triangle ABD = \frac{9}{2} \triangle ABC = \frac{9}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{27\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{答 } AD = 6\sqrt{2}, \triangle ABD \text{ の面積 } \frac{27\sqrt{7}}{4}$$

$$\blacktriangleleft \sin (180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$\blacktriangleleft$ 線分 CD の長さを求める。

$\blacktriangleleft \triangle ABC$ と $\triangle ABD$ は、それぞれ BC , BD を底辺としたときの高さが等しいから、面積の比は底辺の長さの比に等しい。

完答への道のり

- A** 正弦定理から $\triangle ABC$ の外接円の半径を $\sin \angle ACB$ を用いて表すことができた。
- B** 正弦定理から $\triangle ACD$ の外接円の半径を線分 AD の長さと $\sin \angle ACB$ を用いて表すことができた。
- C** 線分 AD の長さを求めることができた。
- D** 余弦定理を用いて、線分 CD の長さを求めることができた。
- E** $\triangle ABD$ の面積を求めることができた。

5 確率 (20 点)

袋の中に、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ の 9 枚のカードが入っている。この袋の中から同時に 5 枚のカードを取り出し、取り出した 5 枚のカードに書かれた数の最大値を M , 最小値を m とする。

- (1) $M=5$ である確率を求めよ。
- (2) $M+m=10$ である確率を求めよ。
- (3) $\frac{M}{m}$ が整数である確率を求めよ。

配点

- (1) 5 点 (2) 7 点 (3) 8 点

解答

(1)

9枚のカードから5枚を取り出すすべての場合の数は

A ${}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ (通り)

B このうち、 $M=5$ となる取り出し方は、 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ のカードを取り出す場合のみであるから、1通り。

C よって、 $M=5$ である確率は $\frac{1}{126}$

答 $\frac{1}{126}$

◀組合せ

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出す組合せの総数は

$${}_nC_r = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 2 \cdot 1} \text{ (通り)}$$

◀最大の数が5であるから、この1通りしかない。

完答への道のり

A カードの取り出し方の総数を求めることができた。

B $M=5$ となるのは、取り出したカードが $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ のときのみであることに気づくことができた。

C 答えを求めることができた。

(2)

A $M+m=10$ となるのは、 $(M, m) = (9, 1), (8, 2), (7, 3)$ のいずれかのときである。

(i) $(M, m) = (9, 1)$ のとき

取り出す5枚のカードは $\boxed{1}$, $\boxed{9}$ と、 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{8}$ の7枚のうちの3枚であるから、取り出し方の数は

B ${}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ (通り)

(ii) $(M, m) = (8, 2)$ のとき

取り出す5枚のカードは $\boxed{2}$, $\boxed{8}$ と、 $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\cdots$, $\boxed{7}$ の5枚のうちの3枚であるから、取り出し方の数は

C ${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ (通り)

(iii) $(M, m) = (7, 3)$ のとき

取り出す5枚のカードは $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ であるから、1通り。

(i)~(iii)より、 $M+m=10$ となる取り出し方の総数は

$$35 + 10 + 1 = 46 \text{ (通り)}$$

E よって、求める確率は $\frac{46}{126} = \frac{23}{63}$

答 $\frac{23}{63}$

◀カードを5枚取り出すから

$M-m \geq 4$ であることに注意する。

◀ $\boxed{1}$ と $\boxed{9}$ 以外の7枚のうちから3枚を取り出す場合の数を求める。

◀ $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ 以外の5枚のうちから3枚を取り出す場合の数を求める。

完答への道のり

A $M+m=10$ となるのは、 $(M, m) = (9, 1), (8, 2), (7, 3)$ のときであることに気づくことができた。

B C D それぞれの場合の数を求めることができた。

E 答えを求めることができた。

(3)

$\frac{M}{m}$ が整数になる場合の数を求める。

(i) $m=1$ のとき、 $\frac{M}{m}$ は必ず整数になる。このとき取り出す5枚のカードは $\boxed{1}$ と、 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{9}$ の8枚のうちの4枚であるから、取り出し方の数は

◀分母の m の値で場合分けをして調べる。

$M-m \geq 4$ に注意する。

A

$${}_8C_4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ (通り)}$$

- (ii) $m = 2$ のとき, $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $M = 6, 8$ のときである。

このとき取り出す 5 枚のカードは

$M = 6$ のとき, $\boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}$ の 1 通り。

$M = 8$ のとき, $\boxed{2}, \boxed{8}$ と, $\boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}$ の 5 枚のうちの 3 枚であるから, 取り出し方の数は ${}_5C_3 = 10$ (通り)

以上により $1 + 10 = 11$ (通り)

B

- (iii) $m = 3$ のとき, $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $M = 9$ のときである。

このとき取り出す 5 枚のカードは $\boxed{3}, \boxed{9}$ と, $\boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}$ の 5 枚のうちの 3 枚であるから, 取り出し方の数は

$${}_5C_3 = 10 \text{ (通り)}$$

- (iv) $m = 4$ のとき, $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $M = 8$ のときである。

このとき取り出す 5 枚のカードは $\boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}$ の場合のみであるから 1 通り。

D

E

- (v) $m \geq 5$ のとき, $\frac{M}{m}$ は整数にならない。

(i)~(v)より, $\frac{M}{m}$ が整数であるようなカードの取り出し方の総数は

$$70 + 11 + 10 + 1 = 92 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は $\frac{92}{126} = \frac{46}{63}$

F

◀ $(M, m) = (8, 2)$ となる取り出し方の数は(2)で求めている。

◀ $m = 5$ のとき, 取り出す 5 枚のカードは $\boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}, \boxed{9}$ である。

答 $\frac{46}{63}$

完答への道のり

A $m = 1$ のときに $\frac{M}{m}$ が整数になる取り出し方の数を求めることができた。

B $m = 2$ のときに $\frac{M}{m}$ が整数になる取り出し方の数を求めることができた。

C $m = 3$ のときに $\frac{M}{m}$ が整数になる取り出し方の数を求めることができた。

D $m = 4$ のときに $\frac{M}{m}$ が整数になる取り出し方の数を求めることができた。

E $m \geq 5$ のとき, $\frac{M}{m}$ が整数にならないことに気づくことができた。

F 答えを求めることができた。

[別解]

$\frac{M}{m}$ が整数になる場合の数を求める。

- (i) $M = 9$ のとき, $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $m = 1, 3$ のときである。

このとき, 取り出す 5 枚のカードは

$m = 1$ のとき, (2)により, 35 通り。

$m = 3$ のとき, $\boxed{3}, \boxed{9}$ と, $\boxed{4}, \boxed{5}, \dots, \boxed{8}$ の 5 枚のうちの 3 枚であるから, 取り出し方の数は ${}_5C_3 = 10$ (通り)

以上により $35 + 10 = 45$ (通り)

- (ii) $M = 8$ のとき, $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $m = 1, 2, 4$ のときである。

◀ 分子の M の値で場合分けをして調べる。

このとき、取り出す5枚のカードは

$m=1$ のとき、 $\boxed{1}$, $\boxed{8}$ と、 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\dots$, $\boxed{7}$ の6枚のうちの3枚で

あるから、取り出し方の数は ${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ (通り)

$m=2$ のとき、(2)より、10通り。

$m=4$ のとき、 $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ であるから、1通り。

以上により $20+10+1=31$ (通り)

- (iii) $M=7$ のとき、 $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $m=1$ のときである。

このとき、取り出す5枚のカードは $\boxed{1}$, $\boxed{7}$ と $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\dots$, $\boxed{6}$ の5枚のうちの3枚であるから、取り出し方の数は ${}_5C_3 = 10$ (通り)

- (iv) $M=6$ のとき、 $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $m=1, 2$ のときである。

このとき、取り出す5枚のカードは

$m=1$ のとき、 $\boxed{1}$, $\boxed{6}$ と $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ の4枚のうちの3枚であるから、取り出し方の数は ${}_4C_3 = 4$ (通り)

$m=2$ のとき、 $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ であるから、1通り。

以上により $4+1=5$ (通り)

- (v) $M=5$ のとき、 $\frac{M}{m}$ が整数になるのは $m=1$ のときである。

このとき、取り出す5枚のカードは $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ であるから、1通り。

- (i)~(v)より、 $\frac{M}{m}$ が整数であるようなカードの取り出し方の総数は

$$45+31+10+5+1=92 \text{ (通り)}$$

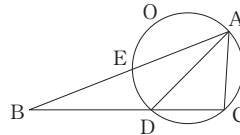
よって、求める確率は $\frac{92}{126} = \frac{46}{63}$

◀ $m=3$ のとき、取り出すカードは $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ となり不適。

答 $\frac{46}{63}$

6 図形の性質 (20点)

$AB=4\sqrt{5}$, $BC=8$ の $\triangle ABC$ があり、辺 BC 上に $BD=5$ となる点 D をとる。また、 $\triangle ADC$ の外接円 O と辺 AB の交点のうち、 A でない方の点を E とする。



- (1) 線分 BE の長さを求めよ。

- (2) 直線 AD と直線 CE の交点を F とするとき、 $\frac{DF}{FA}$ の値を求めよ。

- (3) (2)のとき、直線 BF と辺 AC の交点を G とする。線分 AD が円 O の直径になるとき、線分 AG の長さを求めよ。また、このとき、四角形 $DCGF$ の面積を求めよ。

配点

- (1) 5点 (2) 7点 (3) 8点

解答

(1)

方べきの定理より

$$BE \cdot BA = BD \cdot BC$$

$$BE \cdot 4\sqrt{5} = 5 \cdot 8$$

$$BE = 2\sqrt{5}$$

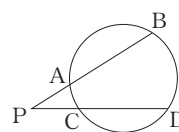
図 $BE = 2\sqrt{5}$

◀方べきの定理

右の図で

$$PA \cdot PB$$

$$= PC \cdot PD$$



完答への道のり

A 方べきの定理を用いて、線分 BE の長さについての関係式を立てることができた。

B 線分 BE の長さを求めることができた。

(2)

△ABD と直線 CE において、メネラウスの定理により

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$$

$$AE = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5},$$

$$CD = 8 - 5 = 3 \text{ より}$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{DF}{FA} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

$$\frac{DF}{FA} = \frac{3}{8}$$

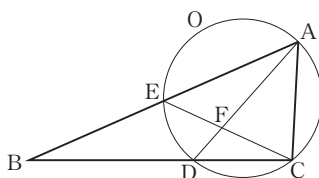
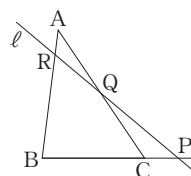


図 $\frac{DF}{FA} = \frac{3}{8}$

◀メネラウスの定理

△ABC の 3 辺 BC, CA, AB またはその延長が、三角形の頂点を通らない直線 ℓ と、それぞれ点 P, Q, R で交わる時

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



完答への道のり

A メネラウスの定理を用いて、 $\frac{DF}{FA}$ の値に関する式を立てることができた。

B $\frac{DF}{FA}$ の値を求めることができた。

(3)

△ABC と点 F において、チェバの定理により

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

$$\frac{CG}{GA} = \frac{3}{5}$$

線分 AD は円 O の直径であるから

$$\angle ACD = 90^\circ$$

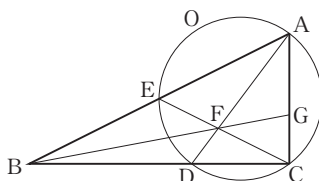
△ABC は、 $\angle ACB = 90^\circ$ の直角三角形であるため、三平方の定理により

$$AC^2 = (4\sqrt{5})^2 - 8^2 = 16$$

よって $AC = 4$

$$AG = \frac{5}{8} AC = \frac{5}{8} \cdot 4 = \frac{5}{2}$$

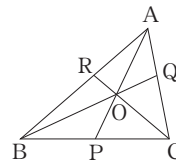
$$\text{また } \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$



◀チェバの定理

△ABC の内部に点 O がある。頂点 A, B, C と O を結ぶ直線が向かい合う辺と、それぞれ点 P, Q, R で交わる時

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$



$$\triangle AFG : \triangle AFC = AG : AC = 5 : 8$$

$$\triangle AFC : \triangle ADC = AF : AD = 8 : 11$$

よって $\triangle AFG : \triangle ADC = 5 : 11$

$$\triangle AFG = \frac{5}{11} \triangle ADC = \frac{5}{11} \cdot 6 = \frac{30}{11}$$

したがって、四角形 DCGF の面積は

$$\triangle ADC - \triangle AFG = 6 - \frac{30}{11} = \frac{36}{11}$$

答 $AG = \frac{5}{2}$, 四角形 DCGF の面積 $\frac{36}{11}$

◀四角形 DCGF の面積は、
 $\triangle ADC - \triangle AFG$ と考えて求める。

完答への
道のり

Ⓐ チェバの定理を用いて、 $\frac{CG}{GA}$ の値を求めることができた。

Ⓑ 三平方の定理を用いて、辺 AC の長さを求めることができた。

Ⓒ 線分 AG の長さを求めることができた。

Ⓓ $\triangle AFG : \triangle ADC$ を求めることができた。

Ⓔ 四角形 DCGF の面積を求めることができた。