13解説

1 (1) △ABD に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos 120^\circ=8^2+7^2-2\cdot 8\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=169$$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　$\mathrm{BD}=\sqrt{169}=13$

(2) $\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-\mathrm{BD}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}}=\dfrac{10^2+9^2-13^2}{2\cdot 10\cdot 9}=\dfrac{12}{2\cdot 10\cdot 9}=\dfrac{1}{15}$

(3) $\sin^2\angle\mathrm{BCD}=1-\cos^2\angle\mathrm{BCD}=1-\left(\dfrac{1}{15}\right)^2=\dfrac{224}{225}$

$\sin\angle\mathrm{BCD}>0$ であるから　$\sin\angle\mathrm{BCD}=\sqrt{\dfrac{224}{225}}=\dfrac{4\sqrt{14}}{15}$

したがって　$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9\sin\angle\mathrm{BCD}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 9\cdot\frac{4\sqrt{14}}{15}$$

$$=14\sqrt{3}+12\sqrt{14}$$

2 (1) 余弦定理から

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cos 135^\circ$$

$$=9+2-6\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=17$$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{17}$

(2) 正弦定理から　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって　$\dfrac{b}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3}{\sin 60^\circ}$

したがって　$b=\dfrac{3\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}=3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$

(3) 正弦定理から　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}$

したがって　$c=\dfrac{\sqrt{6}\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ}=\sqrt{6}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

(4) 余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\dfrac{-15}{2\cdot 3\cdot 5}=-\dfrac{1}{2}$

したがって　$A=120^\circ$

(5) 正弦定理から　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

よって　$\dfrac{6}{\sin 135^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin C}$

したがって　$\sin C=\dfrac{3\sqrt{2}\sin 135^\circ}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$C=30^\circ,\ 150^\circ$

$A=135^\circ$ より $0^\circ<C<45^\circ$ であるから　$C=30^\circ$

(6) 余弦定理から　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cos 60^\circ$

$$=4+16-16\cdot\frac{1}{2}=12$$

$a>0$ であるから　$a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

3 (1) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\sin 45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{21\sqrt{2}}{4}$

(2) $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 4\sin 150^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}=9$

(4) $\cos A=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{8}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$

よって　$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

4 (1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ より $\cos\theta\geqq 0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{24}{25}$

$\sin\theta\geqq 0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{24}{25}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\div\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\times(-5)=-2\sqrt{6}$

(3) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{13}{4}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{13}$

$\tan\theta>0$ より，$0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから　$\cos\theta>0$

したがって　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{4}{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

また　$\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

(4) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

$\sin\theta\geqq 0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{3}{5}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{5}\div\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{5}{4}\right)=-\dfrac{3}{4}$

(5) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{13}{9}$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{13}$

$\tan\theta<0$ より，$90^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　$\cos\theta<0$

したがって　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{13}}=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

また　$\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

(6) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2=\dfrac{1}{3}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\div\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}\times(-\sqrt{3})=-\dfrac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

5 (1) $\cos 125^\circ=\cos(180^\circ-55^\circ)=-\cos 55^\circ$ であるから

$$\cos^2 125^\circ+\sin^2 55^\circ=(-\cos 55^\circ)^2+\sin^2 55^\circ=\cos^2 55^\circ+\sin^2 55^\circ=1$$

(2) $\sin 10^\circ=\sin(90^\circ-80^\circ)=\cos 80^\circ$，$\sin 100^\circ=\sin(180^\circ-80^\circ)=\sin 80^\circ$ であるから

$$\cos 80^\circ\sin 10^\circ+\sin 100^\circ\sin 80^\circ=\cos 80^\circ\cos 80^\circ+\sin 80^\circ\sin 80^\circ$$

$$=\cos^2 80^\circ+\sin^2 80^\circ=1$$

(3) $\sin 70^\circ=\sin(90^\circ-20^\circ)=\cos 20^\circ$，

$\cos 110^\circ=\cos(180^\circ-70^\circ)=-\cos 70^\circ=-\cos(90^\circ-20^\circ)=-\sin 20^\circ$，

$\cos 160^\circ=\cos(180^\circ-20^\circ)=-\cos 20^\circ$

であるから

$$\sin 20^\circ+\sin 70^\circ+\cos 110^\circ+\cos 160^\circ=\sin 20^\circ+\cos 20^\circ-\sin 20^\circ-\cos 20^\circ=0$$