解説

1

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2 (1) 正弦定理により $\frac{a}{\sin A}=2R$ であるから $\frac{3}{\sin 150^\circ}=2R$

よって $R=\frac{3}{2\sin 150^\circ}=3$

(2) 正弦定理により $\frac{b}{\sin B}=2R$ であるから $\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}=2\cdot 4$

よって $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{2\cdot 4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $B=60^\circ,\ 120^\circ$

(3) 正弦定理により $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ であるから $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 120^\circ}$

よって $b=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 120^\circ=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(4) 正弦定理により $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ であるから $\frac{15}{\sin 30^\circ}=\frac{15\sqrt{3}}{\sin C}$

よって $\sin C=15\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{15}=15\sqrt{3}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$B=30^\circ$ より $0^\circ<C<150^\circ$ であるから $C=60^\circ,\ 120^\circ$

(1) 正弦定理により $\frac{12}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=2R$

よって $b=\frac{12\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{6}$，$R=\frac{12}{2\sin 45^\circ}=6\sqrt{2}$

(2) 正弦定理により $\frac{\sqrt{6}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$

よって $\sin B=\frac{\sqrt{6}\sin 45^\circ}{2}=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C=45^\circ$ より $0^\circ<B<135^\circ$ であるから $B=60^\circ,\ 120^\circ$

$B=60^\circ$ のとき $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

$B=120^\circ$ のとき $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

(3) 正弦定理により $\frac{3}{\sin A}=2\cdot 3$ よって $\sin A=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}$

したがって $A=30^\circ,\ 150^\circ$

3 (1) 余弦定理により

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos 60^\circ$

$=16+36-2\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=28$

$b>0$ であるから $b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(2) 余弦定理により

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=(2\sqrt{2}-1)^2+(2\sqrt{2}+1)^2-2\cdot(2\sqrt{2}-1)\cdot(2\sqrt{2}+1)\cos 120^\circ$

$=(9-4\sqrt{2})+(9+4\sqrt{2})-2(8-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=25$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{25}=5$

(3) 余弦定理により

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\frac{-15}{2\cdot 5\cdot 3}=-\frac{1}{2}$

よって $A=120^\circ$

(4) 余弦定理により

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}$

$=\frac{2+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $C=45^\circ$

(1) 余弦定理により $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=(\sqrt{2})^2+4^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cos 45^\circ=10$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{10}$

(2) 余弦定理により $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=4^2+7^2-2\cdot 4\cdot 7\cos 60^\circ=37$

$c>0$ であるから $c=\sqrt{37}$

(3) 余弦定理により

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 15}=\frac{105}{2\cdot 7\cdot 15}=\frac{1}{2}$

よって $A=60^\circ$

4 (1) $a^2=49$，$b^2=25$，$c^2=36$ から $a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

(2) $a^2=8$，$b^2=5$，$c^2=1$ から $a^2>b^2+c^2$

よって，角 A は鈍角である。

(3) $a^2=64$，$b^2=36$，$c^2=28$ から $a^2=b^2+c^2$

よって，角 A は直角である。

(1) $a^2=25$，$b^2=144$，$c^2=169$ から $a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

(2) $a^2=16$，$b^2=81$，$c^2=100$ から $a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

(3) $a^2=81$，$b^2=100$，$c^2=144$ から $a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

5 正弦定理により $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=13:15:7$

となる。

このとき，正の数 k を用いて

$a=13k$，$b=15k$，$c=7k$

と表すことができる。

余弦定理により

$\cos A=\frac{(15k)^2+(7k)^2-(13k)^2}{2\cdot 15k\cdot 7k}=\frac{105k^2}{210k^2}=\frac{1}{2}$

よって $A=60^\circ$

正弦定理により，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=7:5:8$

このとき，正の数 k を用いて $a=7k$，$b=5k$，$c=8k$ と表すことができる。

余弦定理により $\cos A=\frac{(5k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 8k}=\frac{40k^2}{80k^2}=\frac{1}{2}$

よって $A=60^\circ$

6 (1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

(2) $S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 150^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(3) $a=b$ であるから $B=A=30^\circ$

よって $C=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4) $A=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

よって $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(5) $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

△ABC の面積を S とする。

(1) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$

(2) $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(3) $B=180^\circ-(30^\circ+15^\circ)=135^\circ$

よって $S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}\sin 135^\circ=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(4) $S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

7 (1) 余弦定理により

$\cos A=\frac{6^2+7^2-3^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\frac{76}{84}=\frac{19}{21}$

$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{19}{21}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{80}{441}}=\frac{4\sqrt{5}}{21}$

したがって

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{4\sqrt{5}}{21}=4\sqrt{5}$

(2) 余弦定理により

$\cos A=\frac{6^2+4^2-8^2}{2\cdot 6\cdot 4}=\frac{-12}{48}=-\frac{1}{4}$

$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

したがって

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

(1) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{3^2+2^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot3\cdot2}=\dfrac{1}{4}$

$\sin A>0$ であるから $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

(2) 余弦定理により $\cos A=\dfrac{6^2+7^2-11^2}{2\cdot6\cdot7}=-\dfrac{3}{7}$

$\sin A>0$ であるから $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

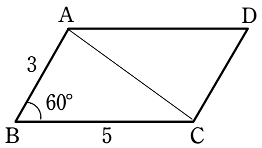
よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{7}=6\sqrt{10}$

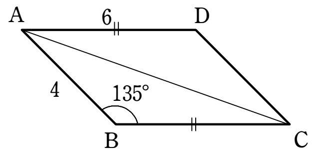
8 平行四辺形 ABCD の面積を S とする。

(1) $S=2\times\triangle ABC=2\times\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin60^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

(2) $BC=AD=6$

よって $S=2\times\triangle ABC=2\times\dfrac{1}{2}\cdot4\cdot6\sin135^\circ=12\sqrt{2}$

(1)


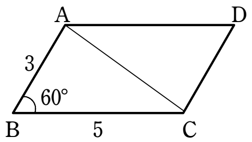
(2)


(1) 対角線 AC で，平行四辺形 ABCD を 2 つの三角形 △ABC と △ACD に分けて考えると

$\triangle ABC=\triangle ACD$

よって $S=2\times\triangle ABC=2\times\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin60^\circ$

$=2\times\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$



(2) 対角線 BD で，平行四辺形 ABCDを 2 つの三角形 △ABD と △CBD に分けて考えると

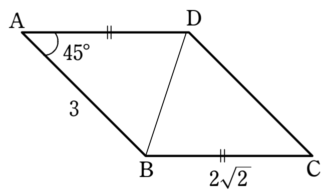
$\triangle ABD=\triangle CBD$

ここで，AD＝BC であるから

$AD=2\sqrt{2}$

よって $S=2\times\triangle ABD$

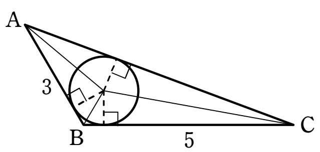
$=2\times\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\sin45^\circ=2\times\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=6$



9 (1) △ABC の面積を S とすると

$S=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$



余弦定理により $b^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ$

$=9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$

$b>0$ であるから $b=\sqrt{49}=7$

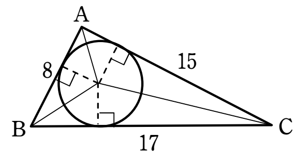
また，三角形に内接する円の半径を r とすると $S=\dfrac{1}{2}r(5+7+3)=\dfrac{15}{2}r$

よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ から $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 余弦定理により

$\cos A=\dfrac{15^2+8^2-17^2}{2\cdot15\cdot8}=0$

よって，この三角形は $A=90^\circ$ の直角三角形であるから，その面積 S は $S=\dfrac{1}{2}\times15\times8=60$



また，三角形に内接する円の半径を r とすると

$S=\dfrac{1}{2}r(17+15+8)=20r$

よって，$20r=60$ から $r=3$

10 △ABC に余弦定理を使うと

$AC^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ$

$=9+25+15=49$

$AC>0$ であるから $AC=\sqrt{49}=7$

四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle D=180^\circ-\angle B=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

$AD=x$ として，△ACD に余弦定理を使うと

$AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cos\angle D$

よって $49=5^2+x^2-2\cdot5\cdot x\cos60^\circ$

整理すると $x^2-5x-24=0$

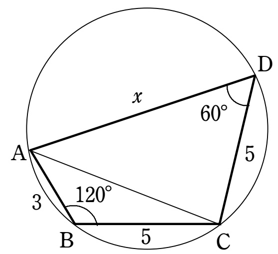
これを解くと $x=-3,\ 8$

$x>0$ であるから $x=8$ すなわち $AD=8$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin120^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin60^\circ=\dfrac{55\sqrt{3}}{4}$



四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle B=180^\circ-\angle D=180^\circ-120^\circ=60^\circ$

△ABC に余弦定理を適用すると

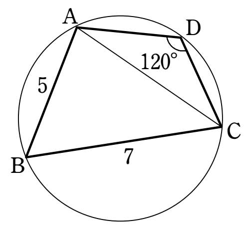
$AC^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cos60^\circ=39$

$AC>0$ であるから $AC=\sqrt{39}$

円の半径を R とすると，正弦定理により

$R=\dfrac{AC}{2\sin B}=\dfrac{\sqrt{39}}{2\sin60^\circ}=\sqrt{13}$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{35\sqrt{3}}{4}$



11 △ABC に余弦定理を使うと

$\cos B=\dfrac{9^2+8^2-7^2}{2\cdot9\cdot8}=\dfrac{2}{3}$

△ABM に余弦定理を使うと

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B$

$=9^2+4^2-2\cdot9\cdot4\cdot\dfrac{2}{3}=49$

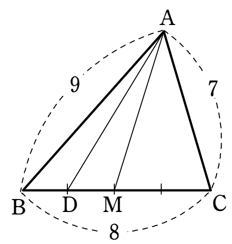
$AM>0$ であるから $AM=7$

また，△ABD に余弦定理を使うと

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$

$=9^2+2^2-2\cdot9\cdot2\cdot\dfrac{2}{3}=61$

$AD>0$ であるから $AD=\sqrt{61}$



12 山の高さを $DH=x$ (m) とすると $HA=x$，$HB=x$，$HC=\sqrt{3}x$

△HAB において，余弦定理により $\cos A=\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot100\cdot x}$ ……①

△HAC において，余弦定理により $\cos A=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}x)^2}{2\cdot200\cdot x}$ ……②

①，② から $\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot100\cdot x}=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}x)^2}{2\cdot200\cdot x}$

整理すると $x^2=10000$

$x>0$ であるから $x=100$

したがって $DH=100$ (m)

△PBH において $BH=PH=50$

△PAH において，$PH:AH=1:\sqrt{3}$ であるから $AH=\sqrt{3}PH=50\sqrt{3}$

△ABH において，余弦定理により $AB^2=50^2+(50\sqrt{3})^2-2\cdot50\cdot50\sqrt{3}\cos30^\circ=2500$

$AB>0$ であるから $AB=\sqrt{2500}=50$ (m)

$\angle AHB=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=45^\circ$

△ABH に正弦定理を使うと $\dfrac{BH}{\sin30^\circ}=\dfrac{200}{\sin45^\circ}$

よって $BH=200\cdot\dfrac{1}{\sin45^\circ}\cdot\sin30^\circ=200\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=100\sqrt{2}$

したがって $PH=BH\tan30^\circ=100\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{100\sqrt{6}}{3}$

ゆえに，塔の高さは $\dfrac{100\sqrt{6}}{3}$ m

13 (1) △ACD は AC＝CD の直角二等辺三角形であるから

$\angle DAC=45^\circ$

また $\angle BAC=60^\circ$

よって $\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=60^\circ-45^\circ=15^\circ$

(2) △ACD は AC＝CD＝1 の直角二等辺三角形であるから

$AD=\sqrt{2}$

△ABC は $\angle A=60^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$\angle C=90^\circ$ の直角三角形であるから

$AB=2$，$BC=\sqrt{3}$

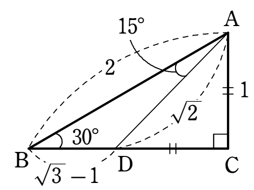
したがって $BD=BC-DC=\sqrt{3}-1$

(3) △ABD に正弦定理を使うと

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin15^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin30^\circ}$

したがって

$\sin15^\circ=(\sqrt{3}-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



また，△ABD に余弦定理を使うと

$\cos15^\circ=\dfrac{2^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-1)^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$