解説

$\boxed{1}$

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\boxed{2}$ (1)　正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ であるから　$\dfrac{3}{\sin 150°}=2R$

よって　$R=\dfrac{3}{2\sin 150°}=3$

(2)　正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=\dfrac{b}{\sin 120°}$

よって　$b=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sin 45°}\cdot\sin 120°=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(3)　正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin A}=2\cdot 3$　　よって　$\sin A=\dfrac{3}{2\cdot 3}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$A=30°,\ 150°$

$\boxed{3}$ (1)　余弦定理により

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cos 60°$

$=16+36-2\cdot 4\cdot 6\cdot\dfrac{1}{2}=28$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(2)　余弦定理により

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3}=\dfrac{-15}{2\cdot 5\cdot 3}=-\dfrac{1}{2}$

よって　$A=120°$

(3)　余弦定理により　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=4^2+7^2-2\cdot 4\cdot 7\cos 60°=37$

$c>0$ であるから　$c=\sqrt{37}$

$\boxed{4}$ (1)　$a^2=49$，$b^2=25$，$c^2=36$ から　$a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

(2)　$a^2=16$，$b^2=81$，$c^2=100$ から　$a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

(3)　$a^2=81$，$b^2=100$，$c^2=144$ から　$a^2<b^2+c^2$

よって，角 A は鋭角である。

$\boxed{5}$ 正弦定理により，$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ が成り立つから

$a:b:c=7:5:8$

このとき，正の数 k を用いて $a=7k$，$b=5k$，$c=8k$ と表すことができる。

余弦定理により　$\cos A=\dfrac{(5k)^2+(8k)^2-(7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 8k}=\dfrac{40k^2}{80k^2}=\dfrac{1}{2}$

よって　$A=60°$

$\boxed{6}$ (1)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\sin 45°=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin 120°=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(3)　$B=180°-(30°+15°)=135°$

よって　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}\sin 135°=\dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(4)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin 60°=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{7}$ (1)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{3^2+2^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot 3\cdot 2}=\dfrac{1}{4}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

(2)　余弦定理により

$\cos A=\dfrac{6^2+4^2-8^2}{2\cdot 6\cdot 4}=\dfrac{-12}{48}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{15}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

したがって

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

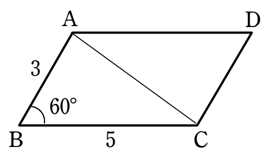
$\boxed{8}$ 平行四辺形 ABCD の面積を S とする。

(1)　$S=2\times\triangle ABC=2\times\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 60°=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

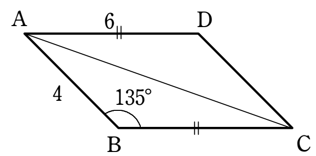
(2)　$BC=AD=6$

よって　$S=2\times\triangle ABC=2\times\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\sin 135°=12\sqrt{2}$

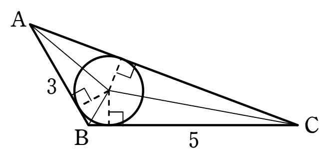
(1)



(2)



$\boxed{9}$ (1)　△ABC の面積を S とすると



$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120°$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

余弦定理により　$b^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 120°$

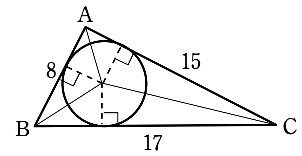
$=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=49$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{49}=7$

また，三角形に内接する円の半径を r とすると　$S=\dfrac{1}{2}r(5+7+3)=\dfrac{15}{2}r$

よって，$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ から　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　余弦定理により



$\cos A=\dfrac{15^2+8^2-17^2}{2\cdot 15\cdot 8}=0$

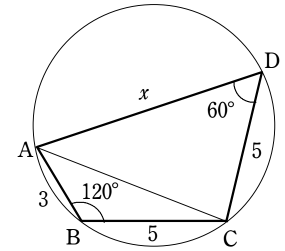
よって，この三角形は $A=90°$ の直角三角形であるから，その面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\times 15\times 8=60$

また，三角形に内接する円の半径を r とすると

$S=\dfrac{1}{2}r(17+15+8)=20r$

よって，$20r=60$ から　$r=3$

$\boxed{10}$ △ABC に余弦定理を使うと



$AC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cos 120°$

$=9+25+15=49$

$AC>0$ であるから　$AC=\sqrt{49}=7$

四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle D=180°-\angle B=180°-120°=60°$

$AD=x$ として，△ACD に余弦定理を使うと

$AC^2=CD^2+AD^2-2\cdot CD\cdot AD\cos\angle D$

よって　$49=5^2+x^2-2\cdot 5\cdot x\cos 60°$

整理すると　$x^2-5x-24=0$

これを解くと　$x=-3,\ 8$

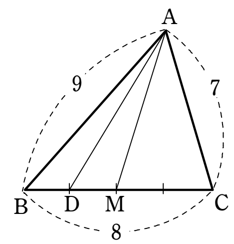
$x>0$ であるから　$x=8$　すなわち　$AD=8$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$S=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120°+\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60°=\dfrac{55\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{11}$ △ABC に余弦定理を使うと



$\cos B=\dfrac{9^2+8^2-7^2}{2\cdot 9\cdot 8}=\dfrac{2}{3}$

△ABM に余弦定理を使うと

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos B$

$=9^2+4^2-2\cdot 9\cdot 4\cdot\dfrac{2}{3}=49$

$AM>0$ であるから　$AM=7$

また，△ABD に余弦定理を使うと

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$

$=9^2+2^2-2\cdot 9\cdot 2\cdot\dfrac{2}{3}=61$

$AD>0$ であるから　$AD=\sqrt{61}$

$\boxed{12}$ 山の高さを $DH=x$ (m) とすると　$HA=x$，$HB=x$，$HC=\sqrt{3}x$

△HAB において，余弦定理により　$\cos A=\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot 100\cdot x}$　……①

△HAC において，余弦定理により　$\cos A=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}x)^2}{2\cdot 200\cdot x}$　……②

①，② から　$\dfrac{100^2+x^2-x^2}{2\cdot 100\cdot x}=\dfrac{200^2+x^2-(\sqrt{3}x)^2}{2\cdot 200\cdot x}$

整理すると　$x^2=10000$

$x>0$ であるから　$x=100$

したがって　$DH=100$ (m)

$\boxed{13}$ (1)　△ACD は AC＝CD の直角二等辺三角形であるから

$\angle DAC = 45°$

また　$\angle BAC = 60°$

よって　$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 60° - 45° = 15°$

(2)　△ACD は AC＝CD＝1 の直角二等辺三角形であるから

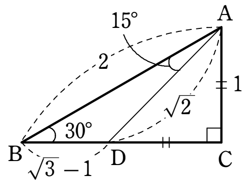
$AD = \sqrt{2}$

△ABC は $\angle A = 60°$，$\angle B = 30°$，$\angle C = 90°$ の直角三角形であるから

$AB = 2$，$BC = \sqrt{3}$

したがって　$BD = BC - DC = \sqrt{3} - 1$

(3)　△ABD に正弦定理を使うと



$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30°}$$

したがって

$$\sin 15° = (\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

また，△ABD に余弦定理を使うと

$$\cos 15° = \frac{2^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}-1)^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$